

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Leonardo Silva Silveira

Modelo de variáveis ocultas para descrição de emaranhamento e
não localidade de Bell no contexto de estados puros

Trabalho apresentado à banca de Defesa de
Dissertação como requisito para obtenção do
título de Mestre em Física pela Universidade
Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Renato M. Angelo

Curitiba - PR
Fevereiro de 2017

S587m

Silveira, Leonardo Silva

Modelo de variáveis ocultas para descrição de emaranhamento e não
localidade de Bell no contexto de estados puros / Leonardo Silva Silveira. –
Curitiba, 2017.

77 f. ; il. color : 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,
Programa de Pós-Graduação em Física, 2017.

Orientador: Renato Moreira Angelo

Bibliografia: p. 73-77.

1. Variáveis (Matemática). 2. Teorema de Bell. 3. Grupos quânticos . I.
Universidade Federal do Paraná. II. Angelo, Renato Moreira. III. Título.

CDD: 515.9



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação FÍSICA

ATA Nº009/2017

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA

No dia vinte de Fevereiro de dois mil e dezessete às 14:00 horas, na sala PE04, Departamento de Física - Bloco II - Centro Politécnico, foram instalados os trabalhos de arguição do mestrando **LEONARDO SILVA SILVEIRA** para a Defesa Pública de sua Dissertação intitulada **Modelo de variáveis ocultas para descrição de emaranhamento e não localidade de Bell no contexto de estados puros**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: RENATO MOREIRA ANGELO (UFPR), ALEXANDRE DIAS RIBEIRO (UFPR), EDUARDO INACIO DUZZIONI (UFSC). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e o mestrando deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela APROVAÇÃO do aluno. O mestrando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, RENATO MOREIRA ANGELO, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 20 de Fevereiro de 2017.

RENATO MOREIRA ANGELO

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

ALEXANDRE DIAS RIBEIRO

Avaliador Interno (UFPR)

EDUARDO INACIO DUZZIONI

Avaliador Externo (UFSC)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação FÍSICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LEONARDO SILVA SILVEIRA** intitulada: **Modelo de variáveis ocultas para descrição de emaranhamento e não localidade de Bell no contexto de estados puros**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua

APROVAÇÃO

Curitiba, 20 de Fevereiro de 2017.

RENATO MOREIRA ANGELO

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

ALEXANDRE DIAS RIBEIRO

Avaliador Interno (UFPR)

EDUARDO INACIO DUZZIONI

Avaliador Externo (UFSC)

*“A fé e a razão constituem como que
as duas asas pelas quais o espírito
humano se eleva para a contemplação
da verdade”.*

São João Paulo II, Papa.

Aos meus pais e primeiros mestres, Rogério
e Rose. Essa conquista é toda de vocês!

À memória do meu grande avô, Luís.

Agradecimentos

Ao Prof. Renato Moreira Angelo, orientador deste trabalho, dedico minhas mais sinceras gratidão e admiração. Num momento delicado em minha vida profissional, fui gentilmente acolhido por ele que, com paciência e maestria, teve o cuidado de me ajudar sempre, não só nas aulas, reuniões e seminários, mas, sobretudo, no exemplo cotidiano de profissionalismo e seriedade bem-humorada. De coração, meu muito obrigado por todos os ensinamentos e oportunidades.

Agradeço aos professores e colegas da Pós-Graduação em Física da UFPR pela convivência, boas conversas e inúmeras ajudas. Em especial ao Prof. Alexandre, ao Valber, à Gislaine e a tantos que igualmente me auxiliaram das mais diversas formas, sempre se colocando à disposição.

Aos amigos que fiz ao longo da minha formação prévia à UFPR, muito obrigado pelo apoio que sempre me dão e por não deixarem a distância fazer diminuir o companheirismo que conquistamos. De maneira tão singular, Allan, Antônio e Rosembergue, vocês, talvez até sem saber, são os exemplos em que me agarro pra lembrar que todo este esforço vale à pena. Com vocês, a Física valeu muito à pena, até aqui!

Deixo um agradecimento a todos os meus amigos da TWR-CT, que já cansaram de ouvir minhas histórias sobre esta dissertação e de muitas maneiras demonstram seu apoio.

Finalizo registrando meu agradecimento e louvor a Deus por me permitir, em sua bondade, a oportunidade de viver mais este ciclo. “Até aqui nos ajudou o Senhor!” (1Sm 7,12).

Resumo

No contexto da discussão acerca da completeza da Mecânica Quântica, iniciada pelo famoso artigo de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR), John Bell provou um teorema mostrando não ser possível a um modelo de variáveis ocultas local reproduzir as previsões da Mecânica Quântica. A razão principal para esta limitação é a presença de emaranhamento, uma classe de correlações mais robustas que as clássicas. Trabalhos recentes, no entanto, construíram modelos baseados em trajetórias reais, no sentido clássico, capazes de reproduzir fielmente o emaranhamento para tempos curtos. Nessa mesma linha, mostramos aqui que, utilizando-se da Teoria Liouvillian, é possível construir um modelo clássico-estatístico que reproduz com precisão, para todo o tempo, a dinâmica de emaranhamento de estados coerentes inicialmente separáveis. Este resultado nos leva a um paradoxo: sendo emaranhamento e não localidade dois recursos equivalentes para estados puros, é possível se deparar com um cenário em que a dinâmica de não localidade pode ser descrita em termos de uma teoria baseada em trajetórias locais. No intuito de avaliar este impasse, passamos ao domínio das variáveis discretas, onde há testes de Bell bem estabelecidos. Construímos, então, um modelo clássico para um sistema de dois spins $1/2$ e definimos, inspirados em medidas de inseparabilidade quântica, um equivalente clássico para as medidas de correlação. Finalmente, submetemos os modelos quântico e clássico à desigualdade CHSH. Com isso, decidimos se estamos diante de uma violação ou confirmação do Teorema de Bell.

Palavras-chave: Emaranhamento. Não localidade de Bell. Teorema de Bell. Variáveis ocultas.

Abstract

In the context of the discussion on the Quantum Mechanics completeness, initiated with the Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) paper, John Bell proved a theorem showing that it is not possible for any local-hidden-variable theory to reproduce the predictions of Quantum Mechanics. The main reason for that is the presence of entanglement, a class of correlations that is more robust than classical correlations. Recent works, however, have constructed trajectory-based models that obey realism and yet faithfully reproduce entanglement at short times. In consonance with the results reported by some of these articles, here we show that, by use of the Livouillian Theory, one can construct a classical-statistical model that accurately reproduce, for all times, the entanglement dynamics of initially separable coherent states. We then find a paradox: since entanglement and nonlocality are believed to be equivalent for pure states, one has at hand a scenario in which the nonlocality dynamics is described in terms of a local trajectory-based theory. In order to elucidate this issue, we move to the domain of discrete variables, where well established Bell tests are available. We then build a classical model for a system of two interacting spin-1/2 particles and constructed, inspired by a measure of quantum inseparability, a corresponding measure of classical inseparability. Finally, we submit both the quantum and the classical models to CHSH tests. With that, we decide whether we are facing a violation of Bell's theorem, or rather a corroboration.

Keywords: Entanglement. Bell nonlocality. Bell's theorem. Hidden variables.

Lista de Figuras

2.1	Gráfico das entropias de Von Neumann e Linear, em função da variável adimensional $\tau = \lambda t$	27
2.2	Gráfico paramétrico no tempo entre as entropias de Von Neumann e Linear para um estado bipartido e interagente de spin $1/2$	27
2.3	Ilustração criada por John Bell em seu artigo [41] para indicar um estado correlacionado clássico: as meias de seu colega de trabalho – o Sr. Bertlmann – obedecem sempre a instrução pré-estabelecida em que uma deve ser da cor rosa e a outra não. Isso implica que medidas em um subsistema (um pé) revelam informações sobre o outro, mas isso, claramente, não tem nada de quântico. É perfeitamente explicado quando se leva em conta a decisão de Bertlmann em impôr tal correlação quando da preparação do estado global (o momento em que ele veste suas meias).	29
2.4	Cenário para descrição estatística de um modelo de teoria de variáveis ocultas em que pares de partículas emaranhadas são enviados a dois laboratórios espacialmente separados, em cada qual é possível medir um dentre três operadores – X, Y e Z. Sempre que uma medida é feita, dois possíveis resultados podem ocorrer (– ou +), implicando o acendimento de uma dentre duas lâmpadas (azul ou vermelha).	31
3.1	Correlação quântica ($\mathcal{C}^{(q)}$) em função do tempo adimensional τ para um estado coerente bipartido inicialmente separável que evolui sob o hamiltoniano $H = \lambda \hat{Q}_a \hat{Q}_b$	50
3.2	Correlação clássica ($\mathcal{C}^{(cl)}$) em função do tempo adimensional τ para um estado bipartido inicialmente separável que evolui sob o hamiltoniano $H = \lambda q_a q_b$	51
4.1	Projeção estereográfica da esfera de Bloch de raio unitário no plano complexo gerado por $x = \Re(w)$ e $y = \Im(w)$. Cada ponto sobre a esfera é localizado por $\hat{n}(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ e projetado no plano pelo prolongamento do vetor $\vec{u} = \hat{n}(\theta, \phi) - \hat{z}$, de tal forma que $w = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi}$	58

4.2	Emaranhamento quântico para um estado coerente de spin bipartido inicialmente separável em função (a) do tempo adimensional τ e (b) do módulo do parâmetro complexo w_{a0} (uma figura equivalente é obtida para o parâmetro w_{b0}). Em (a) tomamos $w_{a0} = w_{b0} = 1$ e, em (b), $\tau = \frac{\pi}{4}$, instante em que a curva do emaranhamento no tempo passa por um máximo.	63
4.3	Correlações quântica $\mathcal{C}^{(q)}$ e clássica $\mathcal{C}^{(cl)}$ para um sistema de dois spins 1/2 inicialmente separável, em função do tempo adimensional τ . Em (a) apresentamos os valores absolutos dessas quantidades e, em (b), comparamos as mesmas grandezas agora normalizadas.	64
4.4	Curva paramétrica entre as correlações quântica $\mathcal{C}^{(q)}$ e clássica $\mathcal{C}^{(cl)}$, ambas normalizadas, para o caso do sistema de spin 1/2 inicialmente separável, desenhada para $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{4}$	65
4.5	Cenário para avaliação da desigualdade CHSH para um sistema de spin 1/2. Cada laboratório pode efetuar uma entre duas possíveis medidas: J_z ou J_i para o laboratório A e J_u ou J_v para o laboratório B, onde i, u e v denotam direções arbitrárias de orientação do aparato de medida.	66
4.6	Evolução no tempo da maximização, S_{\max} , da expressão que origina a desigualdade CHSH em relação a três direções arbitrárias para um sistema quântico de spin 1/2. A violação acontece sempre que esta quantidade alcança valores maiores que 2, revelando, assim, a não localidade do sistema a ela submetido.	67
4.7	Curva paramétrica no tempo entre as medidas de emaranhamento e não localidade de Bell para um sistema de dois spins 1/2 interagentes. O gráfico, por ser monotonamente crescente, comprova a ideia trazida pelo teorema de Gisin de que a presença de emaranhamento, para estados puros, implica presença de não localidade.	68
4.8	Evolução no tempo da maximização, S_{\max} , da expressão que origina a desigualdade CHSH em relação a três direções arbitrárias para um modelo clássico de spin. Não há qualquer violação neste caso, indicando a ausência de não localidade de Bell.	68

Lista de Tabelas

- 2.1 Possíveis instruções recebidas por um par de partículas emaranhadas quando de sua preparação. Cada uma delas pode ser instruída a gerar um resultado que faz acender uma lâmpada azul (A) ou vermelha (V) para cada medida que encontrar no futuro. 32
- 2.2 Para todas as três combinações possíveis entre as medidas escolhidas nos laboratórios A e B, há probabilidade de ocorrer coincidência entre os resultados obtidos por eles (denotada por C) de, no mínimo, um terço. Em qualquer linha, os experimentadores verão acender lâmpadas de mesma cor em pelo menos um dos três casos. 33

Sumário

1	Introdução	12
2	Revisão conceitual	19
2.1	Operador densidade	19
2.2	Medidas de Emaranhamento	22
2.2.1	Entropia de Von Neumann	23
2.2.2	Entropia Linear	24
2.2.3	Exemplo: Estado bi-partido de spin $1/2$	25
2.3	Desigualdades de Bell	28
2.3.1	Incompatibilidade entre TVO e a Mecânica Quântica	30
2.3.2	A desigualdade CHSH para observáveis limitados	35
3	Emaranhamento de variáveis contínuas em TVOs	39
3.1	Mecânica Liouvillianiana	39
3.1.1	Estados coerentes canônicos	41
3.1.2	Distribuição inicial clássica	43
3.2	Medidas de correlação clássica	45
3.3	Acoplamento bilinear	48
3.3.1	Correlação quântica	48
3.3.2	Correlação clássica	49
4	Emaranhamento e não localidade para variáveis discretas em TVOs	53
4.1	Estados coerentes de spin	53
4.2	Interação quântica para um sistema de dois spins	55
4.3	Modelo clássico realista para o spin	56
4.3.1	Parametrização	57
4.3.2	Equações de movimento	59
4.4	Estado bipartido de spin $1/2$	60
5	Conclusões e perspectivas	69
	Referências Bibliográficas	73

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento da Mecânica Quântica no início do século XX nos revelou, aos poucos, características contra intuitivas ao pensamento físico: o caráter intrinsecamente probabilístico da natureza, a impossibilidade de se conhecer simultaneamente o valor de certos pares de quantidades físicas e a não localidade são exemplos de resultados que se chocam frontalmente com as noções dogmáticas (e que muito bem funcionam sob certas condições) que estão nos fundamentos do que hoje chamamos Física Clássica.

Sistemas quânticos, sabe-se, são descritos por elementos de um espaço vetorial complexo \mathcal{H} , o espaço de Hilbert e, em geral, apresentam superposição entre estados que a mentalidade clássica consideraria excludentes¹. O spin de um elétron numa dada direção pode, segundo a teoria quântica, ser descrito por uma superposição de orientações “para cima” e “para baixo” ao mesmo tempo, onde cima (baixo) indica a direção paralela (anti-paralela) à orientação do campo magnético externo com o qual este elétron está alinhado. Usando a notação de Dirac, estamos falando de uma construção do tipo

$$|\psi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle, \quad (1.1)$$

onde $|+\rangle$ e $|-\rangle$ são vetores de estado que descrevem o spin de um elétron orientado para cima e para baixo, respectivamente, e c_+ e c_- , as amplitudes de probabilidade associadas a cada um desses estados, tal que $|c_{+(-)}|^2$ é a probabilidade de uma medida revelar a orientação para cima (para baixo).

Além de conviver melhor com a ideia de superposição, a Mecânica Quântica logo trouxe um desafio de interpretação que a Física Clássica não conhecia: o que é, fisicamente, um processo de medição? Tem-se que, ao medir um estado superposto (como o vetor acima), ocorre o *colapso* desse estado, isto é, a superposição deixa de existir, sobrevivendo apenas o autoestado associado ao resultado que se obteve. Esse processo, o colapso da superposição em um autoestado, é regido pelas probabilidades $|c_{+(-)}|^2$ e, portanto, choca-se, a princípio,

¹É sabido, no entanto, que na óptica clássica há também a possibilidade de superposição coerente entre estados, por exemplo, de polarização.

com a noção de uma dinâmica determinística. Historicamente talvez tenha sido este o ponto de maior debate acerca da interpretação da Mecânica Quântica, iniciado por volta dos anos 1930 e que dura até o presente: o processo de medição em si força uma partícula quântica a mudar seu estado, isto é, cria novos estados, ou o estado da partícula já estava pré-determinado e a medição apenas revelou-o? Em linguagem simplista poderíamos dizer: a partícula é forçada a decidir-se probabilisticamente entre algumas opções de estado no ato da medida ou ela sempre soube que resultado apresentar a uma medição²?

Conhecer o verdadeiro papel da medição frente aos estados quânticos pode se tornar ainda mais crucial. Uma das previsões da Mecânica Quântica sempre foi a existência de fortes correlações entre partículas que tenham interagido em algum momento de forma a dividir, compartilhar ou mesmo entrelaçar algumas de suas características: este fenômeno é o que hoje chamamos de emaranhamento³. Duas partículas emaranhadas estão correlacionadas de maneira mais forte e mais robusta que as correlações previstas na Física Clássica. Dois elétrons podem, por exemplo, emaranhar seus estados de spin de maneira que sempre que o spin de um estiver orientado para cima o do outro estará para baixo nessa mesma direção. Acontece que, quando se aceita que cada um desses estados individuais é probabilisticamente superposto entre as duas possibilidades (para cima e para baixo), a previsão da Mecânica Quântica nos apresenta finalmente um conceito nada intuitivo: a *não localidade*. Se esses dois elétrons emaranhados acima citados têm seu estado global descrito por

$$|\psi\rangle = c_1|+-\rangle + c_2|-+\rangle, \quad (1.2)$$

onde o vetor $|+-\rangle$ indica que o primeiro elétron tem spin para cima e o segundo para baixo e o vetor $|-+\rangle$, o contrário, a superposição sugere que, não obstante a distância física que separa os dois elétrons, ao medir o estado do spin do primeiro – e, portanto, colapsá-lo – sabe-se instantaneamente o estado do segundo. Mas, se aceitamos que o processo de medição tem o poder de alterar o estado do sistema, acabamos agora de mostrar que ele também é capaz de alterar imediatamente o estado do sistema emaranhado a este, mesmo que os dois estejam anos-luz de distância um do outro. Em outras palavras, a Mecânica Quântica parece não confinada à noção de distância. Parece surgir uma interação não local entre partículas⁴, que não só a Física Clássica não previu, como

²É relevante ressaltar que esta é uma discussão geral para algumas interpretações da Mecânica Quântica. Para a interpretação de Copenhague, a mais comum no meio acadêmico, é bem aceito que o processo de medida força a criação de um novo estado físico.

³O primeiro exemplo de um estado emaranhado aparece no artigo [1], ainda que este termo tenha sido lançado na literatura, muito provavelmente, por Schrödinger em [2].

⁴É importante salientar aqui que não estamos nos referindo a potenciais não locais como os presentes na estrutura matemática da Mecânica Clássica (potencial gravitacional, por exemplo), que leva ao acoplamento de equações de movimento. Falamos, sim, de uma nova fenomenologia onde, não obstante a separação espacial de duas partículas emaranhadas, a manipulação de uma parece interferir instantaneamente nas propriedades da outra; a realidade de uma é instantaneamente dependente do que se faça à

introduz um aparente desconforto com as ideias fundamentais, também recentes a essa época, da Relatividade Restrita. De fato, um dos grandes críticos a esta interpretação foi Albert Einstein, principal nome da Relatividade, que chamou a não localidade de “fantasmagórica ação a distância” e pareceu entender justamente no emaranhamento o exemplo para justificar que a Mecânica Quântica não descrevia de maneira completa, ainda que pudesse estar correta, a natureza. O desconforto com as previsões quânticas passaria definitivamente do campo filosófico ao campo físico a partir de então, desde quando uma pergunta foi posta e paira no ar até os dias de hoje: seriam as estranhezas trazidas à luz pela Mecânica Quântica fruto de uma completa assimetria entre o mundo clássico e o recém descoberto mundo quântico; ou essas assimetrias são apenas um indicativo de que a Mecânica Quântica ainda está incompleta enquanto descritora da realidade? Em outras palavras: o mundo subatômico é, de fato, tão fundamentalmente diferente do mundo clássico ou tudo não passa de uma falta de ajustes na recém-criada Teoria Quântica para que continuemos seguros a olhar o mundo com as mesmas intuições lógicas e conceitos físicos já bem estabelecidos e aceitos?

Esta pergunta, pode-se dizer que foi apresentada à comunidade científica no dia 15 de maio de 1935, através do provocativo artigo [1] de Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen (conjuntamente nomeados pela sigla EPR). Através de uma argumentação lógica, EPR mostram que, partindo-se do pressuposto que a noção de localidade, tal como lá definida, deve valer não importa se você está descrevendo o movimento de uma bola de futebol ou de um elétron, a Mecânica Quântica falha em descrever completamente a realidade de um sistema físico, ou seja, a Mecânica Quântica está incompleta. Entende-se por localidade, no contexto de EPR, a impossibilidade de um sistema físico influenciar outro, isto é, afetar as propriedades de outro que esteja muito distante, fora de seu cone de luz de maneira a não permitir interações instantâneas. Se, definem os autores no referido trabalho, eu sou capaz de prever com absoluta certeza o valor de uma quantidade física, sem que para isso eu tenha de perturbar o sistema, então digo que há um elemento de realidade associado a esta quantidade. Uma definição suficientemente boa a EPR para uma teoria completa é que ela tenha sempre um elemento correspondente a cada elemento de realidade. Vamos, agora, aplicar esta lógica à Mecânica Quântica. Um dos pilares desta teoria é o famoso Princípio da Incerteza, que prevê que há pares de quantidades físicas canonicamente conjugadas - como posição e momento - que não podem ser determinados simultaneamente para uma mesma partícula com precisão arbitrária; são quantidades relacionadas a grandezas incompatíveis. Não é possível conhecer com absoluta certeza os valores dessas quantidades simultaneamente. Ora, pelas definições estabelecidas acima, grandezas incompatíveis agora estão proibidas de possuírem realidade simultânea sob pena de a Mecânica Quântica, que não permite sua determinação conjunta, estar negligenciando um (ou outro) elemento de realidade e, portanto, não poder ser tomada como uma teoria

outra, mesmo havendo um Universo de distância entre elas.

completa. Dessa argumentação surge que ou (1) a Mecânica Quântica está incompleta ou (2) grandezas incompatíveis não podem ter realidade simultânea. Uma das afirmações anteriores necessariamente deve ser verdadeira.

Para entender a argumentação de EPR que se segue à constatação acima, vamos tentar apresentar aqui um exemplo mais próximo do proposto por D. Bohm e Y. Aharonov [3] na tentativa de criar intuição sobre uma prova experimental do paradoxo EPR. Considere um par de elétrons que, por algum motivo ainda não especificado aqui, foram preparados de maneira que tenham sempre seus spins na direção z anticorrelacionados, isto é, o estado global é uma superposição dos casos em que o primeiro elétron tem spin para cima e o segundo para baixo e vice-versa. Agora, separemos estes dois elétrons o mais distante possível, em laboratórios que definitivamente não conseguem trocar informação instantaneamente um com o outro. Perceba que, uma vez que não há mais interação entre os dois elétrons – pois estão fora de alcance espaço-temporal um do outro (a isso nos referimos quando dizemos fora do cone de luz) – você consegue conhecer bem as propriedades do spin do segundo elétron apenas fazendo medidas no primeiro elétron! Se o spin do primeiro elétron, ao ser medido numa direção arbitrária⁵, for para cima, é certo que o do segundo spin naquela direção é para baixo. Aqui começa o problema: há uma versão do princípio da incerteza que proíbe que você determine com precisão absoluta o spin de um sistema nas direções, por exemplo, z e x , ao mesmo tempo. *Spin na direção z* e *Spin na direção x* são quantidades incompatíveis. No entanto, espero já ter convencido o leitor a esta altura de que há uma maneira bastante plausível de se medir os spins na direção z e x do segundo elétron de nossa experiência, sem perturbá-lo: basta fazer essas medidas no primeiro elétron. Isso é possível pois os dois elétrons estão emaranhados e aqui está a conclusão: um estado emaranhando é exemplo suficiente para negar a proposição (2) de EPR, isto é, quantidades incompatíveis podem ter realidade simultânea; logo, se (2) é falso, (1) necessariamente é verdadeiro e a Mecânica Quântica está incompleta!

O artigo de EPR, portanto, causa desconforto imediato ao leitor: os estados emaranhados parecem trazer à tona um cenário que a Mecânica Quântica não contemplou; onde estaria o problema? Na maneira como descrevemos os estados quânticos? Ou nas premissas da Mecânica Quântica? Uma maneira de resolver esse impasse poderia ser a inserção de variáveis ocultas, responsáveis por ajustar os resultados teóricos e experimentais às noções de realidade e localidade. As variáveis ocultas contemplariam uma espécie de código de instrução definido no momento da interação que deu origem ao emaranhamento, de maneira que, ainda que o estado de cada partícula individualmente não seja conhecido, cada um dos subsistemas sabe, em pobres palavras, o que fazer diante de cada tipo possível de medição. Isso fecha o raciocínio de que a correlação vem de uma troca

⁵Por simetria, sabe-se que a estrutura que descreve este estado de spin na direção z deve se reproduzir matematicamente equivalente em qualquer direção. Este estado que estamos utilizando, *do tipo singleto*, é invariante por rotações.

de informação que só ocorre localmente, no momento em que o emaranhamento foi gerado e nada sobra de criador para o papel do processo de medição póstuma em qualquer subsistema. Ao completar a Mecânica Quântica com um conjunto de variáveis ocultas, esperava-se que pudéssemos perceber que o emaranhamento, por exemplo, é no fundo uma correlação de mesma natureza que qualquer outra prevista pela Física Clássica.

O primeiro exemplo de tentativa de completar uma teoria local e realista com variáveis ocultas a fim de se obter concordância com as previsões quânticas talvez seja a assim chamada Mecânica Bohmiana [4], teoria desenvolvida por David Bohm em 1952 que toma como reais, em sentido ontológico e determinista, tanto a partícula quanto sua função de onda (na teoria, chamada de onda piloto). Há de se sublinhar, no entanto, que esta é uma teoria manifestamente não local, já que as variáveis ocultas (as trajetórias em si) codificam um caráter intrinsecamente não local para a dinâmica dos sistemas por ela estudados.

Quase trinta anos após o estabelecimento do paradoxo EPR, no ano de 1964, um artigo publicado por John Bell [5] parecia trazer uma resposta definitiva à questão outrora levantada: um caminho para testar experimentalmente se a hipótese de EPR de realismo local estava correta. Bell percebeu que, uma vez assumidas tais hipóteses, qualquer teoria teria sua estatística confinada a uma desigualdade matemática e, segundo as previsões teóricas, a Mecânica Quântica era capaz de violar tal desigualdade, o que sugere desde então que ela não cabe no universo das teorias locais.

Teorema 1 (Teorema de Bell) *Há previsões da Mecânica Quântica que são incompatíveis com qualquer teoria que satisfaça os critérios de localidade e determinismo. Não há teoria de variáveis ocultas locais capaz de reproduzir a Mecânica Quântica.*

Inspirados neste resultado, muitos físicos desenvolveram testes experimentais que ficaram conhecidos como desigualdades de Bell e que puderam corroborar tal descoberta. A mais famosa destas é a desigualdade CHSH, desenvolvida por Clauser, Horne, Shimony e Holt em 1969 [6]. Algumas violações experimentais notáveis ocorreram nos experimentos de Allan Aspect *et al* em 1981 e 1982 [7, 8] e, desde então, outras cada vez mais robustas e aceitáveis têm sido realizadas [9, 10, 11, 12], com destaque aos recentes testes experimentais livres de *loopholes*⁶ [13, 14, 15]. Tudo isso leva a considerar o trabalho de Bell como uma das mais profundas descobertas do século XX. Estamos falando agora de um protocolo experimental capaz de testemunhar a presença de *não localidade*⁷, esta propriedade que diferencia fundamentalmente alguns estados quânticos daqueles previstos pela

⁶Chama-se *loophole* qualquer problema de caráter experimental que possa comprometer a validade do teste de uma desigualdade de Bell, como questões de design do experimento em si, eficiências de detecção, dentre outros.

⁷Neste trabalho, nos referimos corriqueiramente à *não localidade* sempre querendo fazer menção à *não localidade de Bell*, que é aquela propriedade revelada pela violação, por exemplo, da CHSH. Há, já estabelecidas na literatura, outras noções de não localidade [16, 17].

Física Clássica e que, no contexto de estados puros, se confunde com o próprio conceito de emaranhamento [18, 19].

Neste momento, queremos chamar a atenção, no entanto, para o resultado que motivou este trabalho: utilizando-se uma teoria clássica probabilística é possível construir modelos capazes de reproduzir de maneira bastante fiel a dinâmica do emaranhamento quântico. Em [20], mostra-se que a Mecânica Liouvillianiana pode ser tomada como uma teoria realista, onde as próprias trajetórias no espaço de fase ocupam o lugar de variáveis ocultas locais, a princípio, e na qual é possível estabelecer uma mímica, sob certos regimes perfeita, do emaranhamento⁸, o que parece ir de encontro com o que aprendemos a partir do teorema de Bell, gerando um aparente paradoxo que será investigado neste trabalho.

Começamos com uma revisão conceitual sobre o ferramental matemático da Mecânica Quântica e das desigualdades de Bell, no capítulo 2. Aproveitamos para revisar as medidas entrópicas de correlação quântica e introduzir uma versão simetrizada e eficaz para a quantificação de correlações entre distribuições de probabilidade clássicas. Tentaremos chamar a atenção do leitor para o que há de fundamentalmente novo nas correlações quânticas, frente às já previstas pela Física Clássica e, então, apresentar mais detalhadamente uma derivação da desigualdade CHSH para observáveis compactos que, acreditamos, lança mão de hipóteses mais abrangentes que as usualmente conhecidas.

Em seguida, o capítulo 3 se dedicará a revisitar a referência [20] a fim de apresentar o modelo realista que será utilizado e o caminho que desejamos trilhar para o estudo da semelhança entre as medidas de correlação quântica e clássica. Aproveitaremos este momento para introduzir medidas diferentes das que foram utilizadas em [20] e avaliá-las para um sistema em que a coincidência é exata. Há de se notar, no entanto, que para este contexto – o das variáveis contínuas – as desigualdades de Bell conhecidas na literatura (das quais destacamos [23, 24]) são baseadas em ideias de variância estatística e não em hipóteses de separabilidade como as de Bell. Sendo assim, no desejo de investigar o aparente paradoxo de uma teoria clássica ser capaz de reproduzir um fenômeno que é, neste regime, equivalente à não localidade, optamos por migrar para o cenário das variáveis discretas, onde a já consagrada desigualdade CHSH está bem estabelecida e, com ela, poderemos avaliar explicitamente, além da coincidência de correlações, a presença de não localidade em ambos os contextos (quântico e clássico).

Chegamos, então, ao capítulo 4, onde construímos explicitamente um modelo de variáveis ocultas locais (MVOL) que, mostraremos, é capaz de descrever a geração de correlações quânticas (emaranhamento) a tempos curtos⁹. Esta construção se baseará na busca de uma teoria realista e local, cuja dinâmica seja análoga a do spin, a fim de verificar a concordância entre as medidas clássica e quântica de correlação neste cenário

⁸Resultados como o mencionado neste parágrafo foram obtidos de maneira similar em outros tipos de sistemas, como por exemplo os publicados nas referências [21, 22].

⁹Um exemplo de trabalho recente sobre este tipo de construção pode ser obtido em [25].

e submetê-lo a um teste de Bell – especificamente à desigualdade CHSH. Usaremos mais uma vez o formalismo liouvillian, agora conectando-o à Mecânica Quântica pelos estados coerentes de spin. Ali pretendemos mostrar que é possível estabelecer equivalência entre emaranhamento e não separabilidade clássica para tempos curtos, mantendo-se o aparente paradoxo supracitado. Investigamos, então, a presença de não localidade em ambos os contextos na tentativa de compreender melhor o que está por trás deste problema.

Capítulo 2

Revisão conceitual

2.1 Operador densidade

No estudo da Mecânica Quântica, lida-se em geral com dois tipos de incerteza. O primeiro, intrínseco à teoria e descrito, por exemplo, pelo Princípio da Incerteza de Heisenberg [26], reflete a incapacidade de se conhecer simultaneamente alguns pares de quantidades incompatíveis, como posição e momento, de uma mesma partícula com precisão arbitrária. Há também a incerteza ligada à limitação em se conhecer exatamente um estado quântico. Esta poderia ser chamada de *clássica* no sentido de que é de mesma natureza da probabilidade envolvida em qualquer teoria clássica estatística e nasce de uma interpretação baseada no conceito de *ensemble* de estados quânticos. A ferramenta que leva em conta esse segundo tipo de incerteza é o operador densidade ρ , cuja definição intuitiva mostramos a seguir.

Seja um ensemble de estados quânticos definido pelo conjunto $\{|\psi_i\rangle\}$, do qual cada elemento tem associada uma frequência de ocorrência dada pela probabilidade p_i . O operador densidade que descreve este sistema é definido como

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.1)$$

Portanto, o operador densidade é uma matriz que, por consequência de sua definição, obedece a três propriedades básicas [27]:

- I. Hermiticidade:** $\rho^\dagger = \rho$,
- II. Não negatividade:** $\langle \xi | \rho | \xi \rangle \geq 0; \quad \forall |\xi\rangle$,
- III. Unitariedade:** $\text{Tr}(\rho) = 1$.

Os operadores densidade nos ajudam a tratar a chamada estatística quântica, isto é, uma descrição de sistemas quânticos levando-se em conta a incerteza associada à determinação de seus estados. Por isso, dizemos que ele é a representação mais completa aos chamados estados de mistura estatística, ou seja, estados cuja descrição só é possível considerando-se o ensemble a que pertencem.

Pureza quântica:

Pode-se atribuir a um estado físico, uma vez tomada sua descrição via operador densidade, uma medida bastante prática de pureza através da quantidade

$$\mathcal{P}(\rho) = \text{Tr}(\rho^2), \quad (2.2)$$

tal que $\mathcal{P}(\rho) \leq 1$, com a igualdade acontecendo apenas quando ρ descreve um estado puro [28].

Evolução temporal:

Para um estado inicialmente descrito pela matriz densidade ρ_0 , tal qual descrito na Eq. (2.1), sua evolução no tempo é caracterizada pelo operador

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_i p_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)| \\ &= \sum_i p_i U(t) |\psi_i\rangle \langle \psi_i| U^\dagger(t) \\ &= U(t) \rho_0 U^\dagger(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

com $U(t)$ sendo o operador evolução temporal usual associado ao hamiltoniano H . Em especial, para H independente do tempo, $U(t) = \exp \left[\frac{-iHt}{\hbar} \right]$.

Podemos investigar o que acontece com a pureza de um estado quântico genérico $\rho(t)$ descrito pela Eq. (2.3):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\rho(t)) &= \text{Tr}(U(t) \rho_0 U^\dagger(t) U(t) \rho_0 U^\dagger(t)) \\ &= \text{Tr}(U(t) \rho_0^2 U^\dagger(t)) \\ &= \text{Tr}(\rho_0^2 U^\dagger(t) U(t)) \\ &= \text{Tr}(\rho_0^2) = \mathcal{P}(\rho_0). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para este resultado usamos apenas o conhecido fato de que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ e a imposição de que $U^\dagger U = \mathbb{I}$. Portanto, a Eq. (2.4) revela que a pureza de um estado quântico não é alterada por transformações unitárias.

Valores esperados:

O valor médio de um observável A no ensemble descrito pelo estado ρ pode ser calculado como a média, no ensemble, dos valores esperados de A para cada estado a ele pertencente, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle &= \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle \\
 &= \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i| A) \\
 &= \text{Tr} \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| A \right) \\
 &= \text{Tr}(\rho A).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Operador densidade reduzido:

Por vezes, é útil lidar apenas com alguma partição do sistema físico que estamos trabalhando. Para isso, se ρ representa a descrição global de um estado pertencente ao espaço de Hilbert bipartido $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, o subsistema A pode ser descrito pelo operador densidade reduzido, definido por

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho), \tag{2.6}$$

em que $\text{Tr}_B(\rho)$ indica o traço parcial [28], tomado nas variáveis do subespaço B, do operador global ρ . Analogamente, temos que $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho)$. Uma justificativa intuitiva para a utilidade do traço parcial pode ser conseguida quando olhamos novamente para o valor esperado de um observável A que atua em \mathcal{H}_A : como este não atua no subespaço \mathcal{H}_B , ao tomarmos o traço da quantidade ρ_A , uma parte dele (aquela tomada com estados de \mathcal{H}_B) só atuará em ρ , tal que a Eq. (2.5) se reduz a $\langle A \rangle = \text{Tr}_A(A\rho_A)$. Experimentalmente, tomar o traço parcial equivale a descartar um subsistema – um grau de liberdade, por exemplo – com o qual estamos lidando.

2.2 Medidas de Emaranhamento

O trabalho de EPR [1] trouxe, pela primeira vez na literatura científica, um exemplo de estado emaranhado (nomenclatura estabelecida por Schrödinger [2]). Hoje, quase um século depois, o emaranhamento ocupa papel de fundamental importância no avanço dos trabalhos em Computação e Informação Quântica [29] e do próprio entendimento acerca dos fenômenos quânticos e suas eventuais conexões com o mundo dito clássico. Quando dois sistemas inicialmente separados interagem entre si, diz-nos a Mecânica Quântica que estes perdem suas individualidades, não podendo mais ter suas dinâmicas tratadas separadamente; eles emaranham seus estados, criando correlações mais robustas e impactantes que as eventualmente presentes em qualquer sistema clássico [30]. Sobre a natureza dessas correlações inauguradas no exemplo de EPR, trataremos em breve. Por ora queremos estabelecer as definições operacionais deste fenômeno e como medi-lo.

De maneira geral, um estado emaranhado é aquele que não pode ser criado por um conjunto de operações locais e comunicação clássica (LOCC, do inglês *Local Operations and Classical Communication*). Esta definição pode ser lida de diferentes formas se estamos lidando com estados puros ou com misturas estatísticas.

Estados puros emaranhados: Um estado puro bipartido $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é dito emaranhado se, e somente se, não for possível escrevê-lo como produto direto $|\psi\rangle = |\phi^A\rangle \otimes |\phi^B\rangle$, onde $|\phi^i\rangle \in \mathcal{H}_i$. Em outras palavras, um estado puro emaranhado é não-separável, isto é, ainda que se conheça completamente o estado global que descreve o sistema físico, não é possível conceber separadamente vetores de estado para os subsistemas que o compõem.

Estados mistos emaranhados: Para estados mistos, temos que $\rho \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ representará um estado emaranhado sempre que não for possível escrevê-lo como uma mistura estatística de estados separáveis ou, o que é equivalente, encontrar uma forma de escrever $\rho = \sum_i p_i (\rho_i^A \otimes \rho_i^B)$, com p_i obedecendo às imposições usuais sobre probabilidades e $\rho_i^k \in \mathcal{H}_k$ sendo um estado local. Mais uma vez, o conceito de emaranhamento sugere uma inseparabilidade entre as partes que compõem o estado global.

Em geral, quando se deseja quantificar o emaranhamento de um estado bipartido¹, recorre-se a alguma de muitas formas conhecidas quando se lida com estados puros [32].

¹Nos é completo falar aqui de estados bipartidos, uma vez que sempre é possível agrupar partições e transformar um sistema multipartido $|\psi\rangle \in (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_4 \otimes \dots)$ em bipartido, por exemplo, $|\psi\rangle \in [(\mathcal{H}_1) \otimes (\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_4 \otimes \dots)]$. Note-se que as partições aqui referidas não necessariamente representam diferentes partículas ou sistemas; cada partição pode estar associada a um grau de liberdade pertencente, inclusive, a uma mesma partícula. Como exemplo de uma situação como essa, sugerimos a descrição do emaranhamento entre os graus de liberdade spin-órbita do fóton, algo similar ao que acontece na referência [31].

A seguir, vamos introduzir apenas as medidas entrópicas que usaremos nesta dissertação.

2.2.1 Entropia de Von Neumann

Seja $\rho \in \mathcal{H}$ o operador densidade que descreve um estado quântico. A entropia de Von Neumann [33] associada a este estado é dada por

$$S_V(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho), \quad (2.7)$$

que, sem perda de generalidade, pode ser escrita em função dos autovalores λ_i da matriz ρ , como [28]

$$S_V(\rho) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i, \quad (2.8)$$

onde, por construção, toma-se $0 \ln 0 = 0$.

A entropia de Von Neumann obedece a algumas propriedades importantes [34], dentre as quais destacamos:

- **Pureza:** $S_V(\rho) = 0$ se, e somente se, ρ representa um estado puro.
- **Invariância:** $S_V(U\rho U^\dagger) = S_V(\rho)$ para qualquer transformação unitária U .
- **Subaditividade:** $S_V(\rho_{AB}) \leq S_V(\rho_A) + S_V(\rho_B)$ com a igualdade valendo quando $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$.
- **Subaditividade forte:** $S_V(\rho_{ABC}) + S_V(\rho_B) \leq S_V(\rho_{AB}) + S_V(\rho_{BC})$.
- **Desigualdade de Araki-Lieb [35]:** $S_V(\rho_{AB}) \geq |S_V(\rho_A) - S_V(\rho_B)|$.

Dizemos que o emaranhamento do estado bipartido ρ é quantificado por $S_V(\rho_k)$ [36], com $k = A, B$. Se o estado é puro, as propriedades acima afirmam que $S_V(\rho) = 0$ e, aplicando isto à desigualdade de Araki-Lieb, vemos que

$$0 \geq |S_V(\rho_A) - S_V(\rho_B)| \Rightarrow$$

$$S_V(\rho_A) - S_V(\rho_B) = 0 \Rightarrow$$

$$S_V(\rho_A) = S_V(\rho_B), \quad (2.9)$$

o que significa dizer que é completamente equivalente medir o emaranhamento de ρ pelo cálculo da entropia de Von Neumann de qualquer uma de suas partes, neste caso.

Um estado maximamente emaranhado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ possui uma matriz densidade reduzida que pode ser escrita como $\rho_k = \mathbb{I}_k/d_k$, onde \mathbb{I}_k representa a matriz identidade

associada ao subespaço \mathcal{H}_k e d_k a dimensão desse subespaço, com d_k autovalores iguais a $1/d_k$ e, então,

$$\begin{aligned}
 S_V(\rho)^{\max} &= -\sum_{i=1}^d \lambda_i \ln \lambda_i \\
 &= -d_k \left(\frac{1}{d_k} \ln \frac{1}{d_k} \right) \\
 &= -\ln 1 + \ln d_k \\
 &= \ln d_k
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

representa o maior valor atingido pela entropia de Von Neumann enquanto quantificadora de emaranhamento.

2.2.2 Entropia Linear

A entropia linear [37] de um estado ρ é uma medida definida por

$$S_L(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho^2), \tag{2.11}$$

que poderia ser nomeada como a *impureza (diferença à pureza)* de um estado quântico. Lembrando-nos da Eq. (2.2), poderíamos reescrever a entropia linear como

$$S_L(\rho) = 1 - \mathcal{P}(\rho), \tag{2.12}$$

de maneira a facilitar nossa discussão sobre a qualidade dessa medida.

Provamos anteriormente que o estado conjunto não sofre variação em sua pureza quando submetido a transformações unitárias. Em relação aos estados reduzidos, se $U(t) \neq U_A(t) \otimes U_B(t)$ (o que significa dizer que U não pode ser pensado como um operador que age de maneira independente em \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B), em geral, $\rho(t)$ não é mais separável, não podendo ser escrito como $\rho_A(t) \otimes \rho_B(t)$ e isso nos sugere que a pureza do estado reduzido $\mathcal{P}(\rho_A(t))$ ou $\mathcal{P}(\rho_B(t))$ não obedecerá à Eq. (2.4) e não será mais constante no tempo. Todo este parágrafo poderia ser resumido no seguinte enunciado: se uma transformação gera emaranhamento num sistema bipartido inicialmente separável, as purezas dos subsistemas que o constituem não serão constantes no tempo e o emaranhamento pode ser testemunhado pela diminuição na pureza de qualquer um deles. Como consequência, aceitamos

$$S_L(\rho_k) = 1 - \mathcal{P}(\rho_k) = 1 - \text{Tr}(\rho_k^2), \tag{2.13}$$

com $k = A, B$, como quantificador do emaranhamento do sistema global ρ .

A entropia linear pode assumir qualquer valor entre 0, para um estado separável, e

$$\begin{aligned} S_L^{\max}(\rho_k) &= 1 - \text{Tr} \left(\frac{\mathbb{I}_k}{d_k^2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{d_k}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

correspondente a um estado maximamente emaranhado.

Finalmente, queremos registrar a possibilidade de utilização da entropia de Tsallis [38] de um dos subsistemas como medidor fidedigno de emaranhamento [39] com a vantagem operacional de que esta se reduz tanto à entropia de Von Neumann quanto à linear, segundo escolha conveniente do parâmetro q que a define.

2.2.3 Exemplo: Estado bi-partido de spin 1/2

Suponha um estado de spin 1/2 bipartido inicialmente preparado como produto tensorial

$$|\psi_o\rangle = |z_A\rangle|z_B\rangle, \quad (2.15)$$

onde

$$|z_k\rangle = \frac{|+\rangle_k + e^{-i\phi_k}|-\rangle_k}{\sqrt{2}} \in \mathcal{H}_k, \quad (2.16)$$

para $k = A, B$, e $|\pm\rangle_k$ é o autovetor de σ_z^k com autovalor ± 1 . Se permitirmos que o estado global evolua de maneira a fazer interagir os subsistemas A e B de acordo com o hamiltoniano

$$H = \lambda \hbar (\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B), \quad (2.17)$$

é esperado que o estado se torne emaranhado. Afim de visualizar a dinâmica do emaranhamento presente no estado em questão a medida que o tempo passa, vamos recorrer às medidas de entropia de Von Neumann e linear sobre o estado evoluído. Com o auxílio

das propriedades de exponenciais de operadores de Pauli [40], temos, então,

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\psi_o\rangle \\
&= \cos(\lambda t)\mathbb{I}|\psi_o\rangle - i\sin(\lambda t)(\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B)|\psi_o\rangle \\
&= \frac{\cos \lambda t}{2}(|++\rangle + e^{-i\phi_B}|+-\rangle + e^{-i\phi_A}|-+\rangle + e^{-i(\phi_A+\phi_B)}|--\rangle) - \\
&\quad - \frac{i\sin \lambda t}{2}(|++\rangle - e^{-i\phi_B}|+-\rangle - e^{-i\phi_A}|-+\rangle + e^{-i(\phi_A+\phi_B)}|--\rangle) \\
&= \frac{1}{2}[e^{-i\lambda t}|++\rangle + e^{i\lambda t}e^{-i\phi_B}|+-\rangle + e^{i\lambda t}e^{-i\phi_A}|-+\rangle + e^{-i\lambda t}e^{-i(\phi_A+\phi_B)}|--\rangle].
\end{aligned}$$

Definindo a variável de tempo adimensional $\tau = \lambda t$, o operador densidade $\rho(\tau) = |\psi(\tau)\rangle\langle\psi(\tau)|$ associado a este estado é dado por

$$\rho(\tau) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & e^{-2i\tau}e^{i\phi_B} & e^{-2i\tau}e^{i\phi_A} & e^{i(\phi_A+\phi_B)} \\ e^{2i\tau}e^{-i\phi_B} & 1 & e^{i(\phi_A-\phi_B)} & e^{2i\tau}e^{i\phi_A} \\ e^{2i\tau}e^{-i\phi_A} & e^{-i(\phi_A-\phi_B)} & 1 & e^{2i\tau}e^{i\phi_B} \\ e^{-i(\phi_A+\phi_B)} & e^{-2i\tau}e^{-i\phi_A} & e^{-2i\tau}e^{-i\phi_B} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Tomando agora o traço parcial no subespaço \mathcal{H}_B , obtemos o operador densidade reduzido do espaço \mathcal{H}_A

$$\rho_A(\tau) = \text{Tr}_B(\rho) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\tau)e^{i\phi_A} \\ \cos(2\tau)e^{-i\phi_A} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

cujos autovalores são $\cos^2(\tau)$ e $\sin^2(\tau)$ e ainda,

$$\rho_A^2(\tau) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \cos^2(2\tau) & 2\cos(2\tau)e^{i\phi_A} \\ 2\cos(2\tau)e^{-i\phi_A} & 1 + \cos^2(2\tau) \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Agora estamos aptos a calcular a entropia de Von Neumann e a entropia linear para este sistema. Para a primeira, temos

$$S_V(\tau) = -\cos^2(\tau) \ln(\cos^2(\tau)) - \sin^2(\tau) \ln(\sin^2(\tau)) \quad (2.21)$$

e para a segunda,

$$S_L(\tau) = \frac{\sin^2(2\tau)}{2}. \quad (2.22)$$

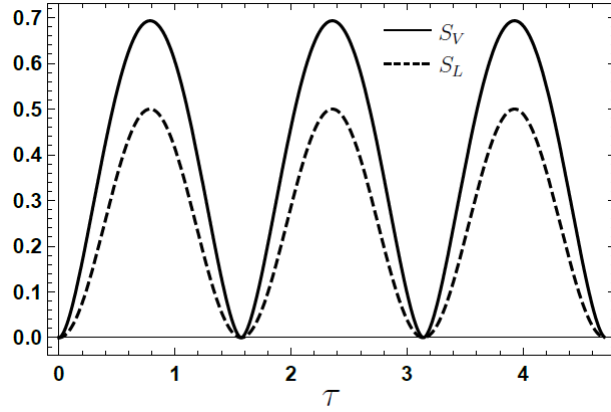


Figura 2.1: Gráfico das entropias de Von Neumann e Linear, em função da variável adimensional $\tau = \lambda t$.

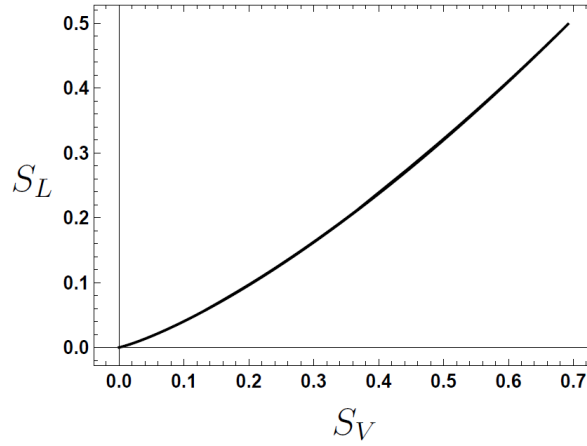


Figura 2.2: Gráfico paramétrico no tempo entre as entropias de Von Neumann e Linear para um estado bipartido e interagente de spin 1/2.

Esses resultados são mostrados no gráfico da Figura 2.1. Perceba que ambas as medidas concordam que o estado global emaranha-se e desemaranha-se periodicamente durante sua evolução sob a regência do hamiltoniano em questão, isto é, elas se anulam simultaneamente. Os dois gráficos coincidem suas abscissas para os máximos e mínimos, o que indica que apontam máximo e ausência de emaranhamento nos mesmos instantes de tempo. Por fim, concordam igualmente com o ritmo de crescimento e decrescimento do emaranhamento. Isso deve ser suficiente para aceitarmos que as duas medidas são qualitativamente equivalentes. Um argumento adicional surge na Figura 2.2 que apresenta o gráfico paramétrico entre $S_V(\rho_A)$ e $S_L(\rho)$ como uma função monótona e crescente para $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{4}$.

Como uma última palavra sobre estes gráficos, lembremo-nos do que foi dito nas seções anteriores e percebemos que neste exemplo, em que $\dim(\mathcal{H}_k) = 2$, o máximo valor previsto

para a entropia de Von Neumann (Eq. (2.10)) deve ser igual a

$$S_V^{\max} = \ln(2) \approx 0,69,$$

e para a entropia linear (Eq. (2.14)),

$$S_L^{\max} = 1 - \frac{1}{2} = 0,5,$$

o que coincide com os máximos dos gráficos apresentados.

2.3 Desigualdades de Bell

Nesta seção pretendemos discutir as desigualdades de Bell, suas motivações e o principal exemplo associado a elas. Para tanto, vale começarmos com uma discussão sobre a sutileza dos estados emaranhados frente às correlações já previstas, por exemplo, pela Física Clássica. Esta é a chave para compreendermos o pensamento e a inspiração de Bell. Entendemos como pertencente a essa classe de desigualdade, qualquer inequação bilinear que limite a estatística de uma teoria local.

Um cenário do tipo Bell pode ser o seguinte: um gerador de pares de partículas com algum grau de liberdade correlacionado abastece dois laboratórios suficientemente distantes um do outro de modo a proibir qualquer comunicação instantânea entre eles. Em cada laboratório, pode-se optar aleatoriamente por alguma dentre uma variedade de medidas disponíveis. No primeiro laboratório, escolhe-se a medida A e obtém-se o resultado a e no segundo, mede-se B e obtém-se o resultado b . Toda vez que o experimento for rodado, o resultado global – alcançado nos dois laboratórios – será regido pela probabilidade condicional $P(a, b|A, B)$ (lê-se: a probabilidade de se obter os resultados a e b dado que foram escolhidas as medidas A e B). Em geral, observa-se que

$$P(a, b|A, B) \neq P(a|A)P(b|B), \quad (2.23)$$

ou seja, os eventos *medir A e obter a* e *medir B e obter b* não são independentes. Há de se chamar a atenção de que não há nada essencialmente quântico neste tipo de observação. Na verdade, esse é um resultado obtido para qualquer teoria local aplicada a modelos com algum tipo de correlação. O próprio John Bell utilizou um exemplo [41] para demonstrar que esse tipo de característica – independência de medidas sobre um estado bipartido e correlacionado – não é uma revelação inovadora da Mecânica Quântica. Não é isso que descreve ou diferencia o emaranhamento. As cores das meias do Sr. Bertlmann, segundo esse exemplo, obedecem uma lei de correlação: uma delas é rosa e a outra não o é. Medir, descobrir, a cor de uma delas implica necessariamente em conhecimento a respeito da outra. As probabilidades de ser *rosa* ou *não-rosa* em cada pé são independentes e, é

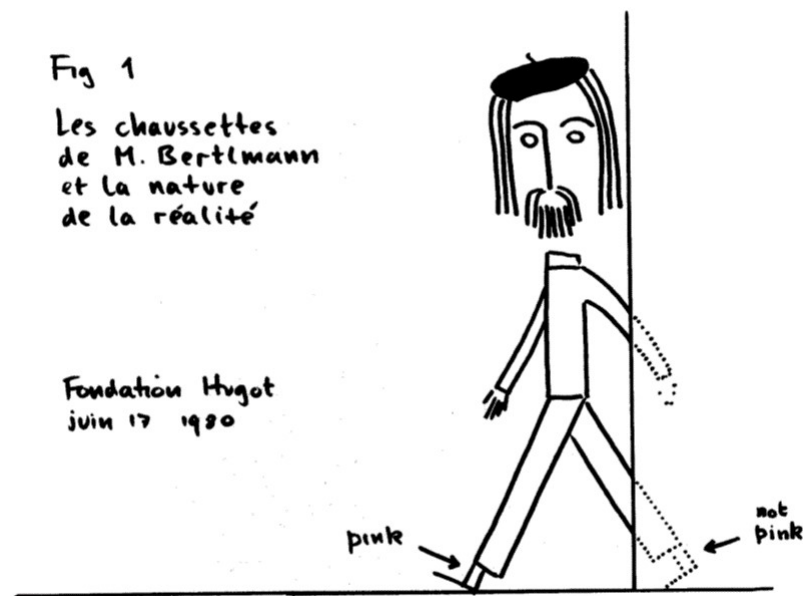


Figura 2.3: Ilustração criada por John Bell em seu artigo [41] para indicar um estado correlacionado clássico: as meias de seu colega de trabalho – o Sr. Bertlmann – obedecem sempre a instrução pré-estabelecida em que uma deve ser da cor rosa e a outra não. Isso implica que medidas em um subsistema (um pé) revelam informações sobre o outro, mas isso, claramente, não tem nada de quântico. É perfeitamente explicado quando se leva em conta a decisão de Bertlmann em impôr tal correlação quando da preparação do estado global (o momento em que ele veste suas meias).

claro, não há nada de quântico com as meias do Sr. Bertlmann. A questão crucial é que por detrás desta correlação há uma instrução prévia bastante clara, uma regra local bem definida, que define todos os resultados de medidas futuras sobre a cor das meias no momento da preparação – quando elas são vestidas. O que soa realmente estranho neste ponto é pensar que, para o caso de um Sr. Bertlmann quântico, nenhuma das meias teria cor definida antes da medida, ou seja, o pé de cor não-rosa só ganharia definição imediatamente quando medíssemos que o outro pé – distante do primeiro – tem meia rosa. A pergunta agora que fica, portanto, é: o que há de diferente com as correlações previstas na Mecânica Quântica? Por que não é possível explicar o emaranhamento a partir de um grupo de instruções previamente definidas ou mesmo descrevê-lo completamente pelo processo de preparação do estado?

Uma intuição sobre esta pergunta pode ser obtida quando olhamos para o seguinte exemplo: um pesquisador dispõe de duas moedas imantadas e deseja medir, em repetidos lançamentos, o observável *face da moeda k* (F_k) para cada uma delas. Se os momentos de dipolo magnético das moedas forem muito grandes e elas estiverem próximas uma da outra, o pesquisador percebe que, praticamente em todos os lançamentos, as moedas caem com a mesma face voltada para cima, isto é, denotando-se os possíveis resultados por (cara,coroa)=(0,1), é observado, por exemplo, que a probabilidade de se obter duas caras

é $p(00|F_A F_B) \approx \frac{1}{2}$, que é bem diferente da probabilidade desse mesmo evento ocorrer para moedas não imantadas, $p(0|F_A)p(0|F_B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Acontece que, se o pesquisador separar suficientemente as moedas, chega um momento em que a interação magnética entre elas cessa e, a partir de então, a probabilidade de se obter as duas caras se escreverá como $p(0|F_A)p(0|F_B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, ou seja, quebra-se a dependência estatística entre as moedas, o que indica que os eventos (qual face de cada moeda ficará voltada para cima) estão descorrelacionados. Aqui está uma diferença: curiosamente, em experimentos quânticos com estados emaranhados, a dependência estatística não é quebrada pelo afastamento dos sistemas!

É nesse contexto que surge a discussão sobre as variáveis ocultas. Parece razoável que, ao completar uma teoria aparentemente incompatível com as noções de realismo e localidade com um conjunto de variáveis ocultas, não acessíveis e ligadas de alguma forma com as instruções que o estado recebe quando de sua preparação, se possa aplicar o mesmo raciocínio de correlações clássicas e, portanto, recombinar esses fenômenos. Mas isso não é verdade, como tentaremos convencer o leitor a seguir, justamente porque há diferenças fenomenológicas entre as correlações clássicas e quânticas, como, por exemplo, a capacidade de sobreviver mesmo a grandes distâncias. Na próxima subseção, discutimos um exemplo que põe em xeque essa tentativa de conciliação.

2.3.1 Incompatibilidade entre TVO e a Mecânica Quântica

As discussões advindas do trabalho de EPR deixaram uma pergunta sobre a qual a comunidade científica se debruça desde então: seria possível completar a Mecânica Quântica de maneira a torná-la consistente com as previsões dadas por uma hipótese absolutamente razoável de realismo local da natureza? Para entender a implicação desse complemento, usaremos o exemplo a seguir.

Voltamos ao cenário de um experimento de Bell: um dispositivo gera pares de partículas emaranhadas e com elas abastece dois laboratórios muito distantes, A e B. Ao receber a sua parte do par emaranhado, cada laboratório pode escolher submetê-la a uma dentre três medidas possíveis² cujos resultados são sempre + ou –, codificados aqui por acender uma lâmpada azul ou uma lâmpada vermelha, como mostra a Figura 2.4. A escolha sobre a qual medida cada laboratório submeterá seu subsistema é perfeitamente aleatória e independe das escolhas no outro.

Começamos por tratar este experimento sob a hipótese de que é possível existir um conjunto de variáveis ocultas, aqui ligadas às instruções que cada partícula recebe em sua preparação, de maneira que todos os resultados se adequem às noções de determinismo e localidade, tal qual quistas por EPR e que podem ser resumidas em dois enunciados:

²Neste momento não estamos nos preocupando em dar especificidade experimental ao protocolo a que nos referimos. Essas medidas podem ser orientações de polarizadores [42] – para o caso de um experimento com fótons – ou de dispositivos do tipo Stern-Gerlach [40] – para *spin* –, por exemplo.



Figura 2.4: Cenário para descrição estatística de um modelo de teoria de variáveis ocultas em que pares de partículas emaranhadas são enviados a dois laboratórios espacialmente separados, em cada qual é possível medir um dentre três operadores – X, Y e Z. Sempre que uma medida é feita, dois possíveis resultados podem ocorrer (– ou +), implicando o acendimento de uma dentre duas lâmpadas (azul ou vermelha).

1. Localidade: Não há qualquer interação entre as partículas após serem espacialmente separadas.

2. Determinismo: As medidas implementadas sobre as partículas apenas revelam valores pré-estabelecidos e até então ignorados para essa grandeza.

Adicionalmente, um modelo de variáveis ocultas pode estabelecer que as correlações são fruto apenas de um processo bastante específico de preparação, isto é, são formadas por um conjunto de instruções locais (como no caso das meias correlacionadas do Sr. Bertlmann, cuja preparação – baseada no gosto exótico de quem as veste – determina as correlações, que sobrevivem mesmo para instantes futuros quando os sistemas são separados), o que nos leva a uma terceira sentença:

3. Modelo de variáveis ocultas: Cada partícula sabe, dada sua preparação, o que fazer diante de cada medida possível que ela encontre em seu caminho, como que possuindo um manual de instruções compartilhado com seu par e que explicaria a correlação (as variáveis que codificam tais instruções são inacessíveis ao experimento e chamadas de variáveis ocultas).

Estabelecidas as regras, vamos montar a estatística de correlação entre os resultados obtidos em cada laboratório para este modelo.

Inicialmente, cada par de partículas pode receber alguma dentre as oito instruções apresentadas na Tabela 2.1 sobre qual lâmpada – azul (A) ou vermelha (V) – fazer acender nas possíveis medidas que encontrará quando chegar ao seu laboratório de destino. Por

	Medida X	Medida Y	Medida Z
1	A	A	A
2	A	A	V
3	A	V	A
4	V	A	A
5	A	V	V
6	V	A	V
7	V	V	A
8	V	V	V

Tabela 2.1: Possíveis instruções recebidas por um par de partículas emaranhadas quando de sua preparação. Cada uma delas pode ser instruída a gerar um resultado que faz acender uma lâmpada azul (A) ou vermelha (V) para cada medida que encontrar no futuro.

exemplo, a instrução 1 desta tabela associa-se a uma partícula cujo estado foi preparado de maneira específica tal que, para qualquer uma das três medidas que o experimentador deseje fazer, o resultado será aquele que faz acender a lâmpada azul. Já uma partícula preparada segundo a instrução 2 fará acender a lâmpada vermelha caso seja submetida à medida Z.

Não é difícil perceber que, uma vez que duas partículas pertencentes ao mesmo sistema recebem a mesma instrução dentre as oito possíveis, quando os dois laboratórios escolherem medir o mesmo observável, haverá coincidência nos resultados obtidos por eles cem por cento das vezes, isto é, sempre se acenderão lâmpadas de mesma cor nos dois laboratórios. Nos interessa encontrar, então, o que ocorre quando cada experimentador escolhe uma medida diferente: há três combinações possíveis (já que a ordem é indiferente) e os mesmos resultados acontecerão gerando coincidência (C) ou não (-) segundo a estatística apresentada na Tabela 2.2 e de acordo com qual das oito instruções o par de partículas recebeu.

Perceba que, em todos os casos em que os dois laboratórios escolhem medidas diferentes, há coincidência de resultados em pelo menos $\frac{1}{3}$ das vezes. Sendo assim, podemos concluir que nosso modelo determinista e local, complementado com a noção de variáveis ocultas, prevê que múltiplas rodadas do processo experimental devem gerar resultados iguais nos dois laboratórios em, no mínimo, um terço do número de rodadas. Em outras palavras, este modelo de variáveis ocultas faz surgir uma limitação inferior à probabilidade p_c de se obter resultados iguais: para qualquer cenário aqui possível, $p_c \geq \frac{1}{3}$. Vejamos agora o que prevê a Mecânica Quântica para o mesmo protocolo.

Considerando o formalismo quântico, um par de partículas gerado pelo mesmo dispositivo supracitado pode ter seu estado global escrito como

$$|\psi_0\rangle = \frac{|AA\rangle - |VV\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.24)$$

	X e Y	Z e Y	X e Z
1	C	C	C
2	C	-	-
3	-	-	C
4	-	C	-
5	-	C	-
6	-	-	C
7	C	-	-
8	C	C	C

Tabela 2.2: Para todas as três combinações possíveis entre as medidas escolhidas nos laboratórios A e B, há probabilidade de ocorrer coincidência entre os resultados obtidos por eles (denotada por C) de, no mínimo, um terço. Em qualquer linha, os experimentadores verão acender lâmpadas de mesma cor em pelo menos um dos três casos.

onde o ket $|AA\rangle$ representa o caso em que as duas partículas são preparadas tal que farão acender a lâmpada azul em uma certa medida e o ket $|VV\rangle$, a lâmpada vermelha. Por simplicidade, imagine agora que as medidas X, Y, Z estão associadas, por exemplo, a orientações arbitrárias de um dispositivo Stern-Gerlach que cada experimentador usará para medir o spin de sua partícula; se a partícula for defletida para cima (baixo) nessa direção, acender-se-á a lâmpada vermelha (azul). Dada a simetria do estado, assumimos a hipótese de que ele terá a mesma forma geral quando escrito na base de autoestados de qualquer um dos operadores que representam essas orientações de medida. Convém, agora, olhar para a atuação de um operador G

$$G = \mathbb{I} \otimes R(\theta), \quad (2.25)$$

que representa a operação conjunta de duas medidas defasadas de θ graus uma em relação à outra, sobre o estado global $|\psi_0\rangle$. \mathbb{I} representa o operador identidade a ser aplicado no primeiro subespaço e $R(\theta)$ o operador usual de rotação no segundo. Assim, temos como estado final, após as medidas

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= G|\psi_0\rangle \\
&= (I \otimes R(\theta)) \frac{|AA\rangle - |VV\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{|A\rangle \otimes (\cos \theta |A\rangle + \sin \theta |V\rangle) - |V\rangle \otimes (-\sin \theta |A\rangle + \cos \theta |V\rangle)}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\cos \theta |AA\rangle + \sin \theta |AV\rangle + \sin \theta |VA\rangle - \cos \theta |VV\rangle}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Lembrando que os coeficientes da combinação linear de estados quânticos são, na

verdade, amplitudes de probabilidade, vemos que o resultado acima prevê que há probabilidade de coincidência, isto é, obter-se ao mesmo tempo AA ou VV , igual a

$$\begin{aligned} p_c &= p_{AA} + p_{VV} \\ &= \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

que não condiz com a previsão do modelo de variáveis ocultas que usamos anteriormente. Isso porque $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ e, portanto, a expressão que nos fornece a coincidência de resultados aqui pode assumir qualquer valor positivo menor que 1, o que obviamente inclui valores menores que $\frac{1}{3}$. Em especial, quando $\theta = 120^\circ$, a probabilidade de coincidência prevista pelo formalismo quântico será $p_c = \cos^2 120^\circ = \frac{1}{4}$. Claramente essa probabilidade é menor que a menor probabilidade prevista anteriormente. Em outras palavras, a Mecânica Quântica viola a desigualdade $p_c \geq \frac{1}{3}$ imposta pelo modelo de variáveis ocultas, deixando a sensação de que este modelo não é capaz de reproduzir completamente a teoria quântica.

Este resultado, obtido aqui de maneira bastante mais pobre, foi o que levou John Bell a perceber o caminho para a resposta mais duradoura até aqui ao paradoxo EPR: a Mecânica Quântica não cabe em nenhuma previsão realista e local, ainda que complementada com variáveis ocultas [5]. Em outras palavras, segundo Bell, a solução do paradoxo é que as hipóteses estão erradas; a transposição das noções clássicas de determinismo e localidade para a Teoria Quântica não é simples e talvez nem válida. Isso leva a enunciar de maneiras diferentes o resultado que passou à História como teorema de Bell. A mais expressiva, em nossa opinião, é que a Mecânica Quântica é essencialmente não-local e, por isso, não é possível completar teorias locais e reproduzir resultados quânticos se não se abrir mão desse caráter. Isso impõe uma ruptura brusca na Física. A Mecânica Clássica é, agora sabe-se, essencialmente diferente da Quântica desde suas mais sólidas e fundamentais bases. Resta saber, no entanto, se isso não é uma previsão exagerada da teoria ou se, de fato, a natureza comporta-se assim. Eis aqui a grande contribuição que se pôde tirar do trabalho de Bell.

Ao comparar as estatísticas quânticas e locais, percebe-se que uma viola o regime gerado pela outra. Isso sugere a criação das chamadas desigualdades de Bell. A receita para a montagem dessas desigualdades é, em essência, a mesma que utilizamos no exemplo desta seção: construa um modelo local e descubra em quais limites as estatísticas de correlação conseguem chegar. Se alguma teoria gerar uma estatística fora desse regime, poder-se-á dizer que esta é não-local. A mais importante vantagem dessa linha de pensa-

mento é que valores médios, em geral, são fáceis de se obter em laboratório. No fundo, é com isso que se lida na Física Experimental e, sendo assim, ganhamos um caminho para testar a última questão que levantamos, isto é, podemos aferir se a natureza é ou não respeitosa aos limites impostos pela hipótese de localidade. Os primeiros experimentos a usar as ideias de Bell e comparar a estatística de sistemas quânticos à local foram feitos por Alan Aspect [7] e pelo grupo de Clauser, Horne, Shimony e Holt [6], cujas iniciais ajudam a nomear a mais famosa desigualdade do tipo Bell, a desigualdade CHSH, que derivaremos na próxima seção.

2.3.2 A desigualdade CHSH para observáveis limitados

Originalmente, a desigualdade proposta por CHSH foi derivada num cenário bastante parecido com o que tratamos anteriormente, que detalharemos a seguir. Um gerador de pares de partículas emaranhadas abastece dois laboratórios distantes um do outro, personificados agora nos físicos experimentais fictícios Alice e Bob, que podem medir localmente os observáveis genéricos A ou A' e B ou B' , respectivamente. Após muitas rodadas do experimento, depois de emitidos diversos pares de partículas e feitas diversas medidas, é possível computar a quantidade

$$P(a, b|A, B), \quad (2.26)$$

isto é, a probabilidade de se obter os resultados a e b , dado que Alice escolheu efetuar a medida A e Bob a medida B . Em geral, esta quantidade não pode ser fatorada, ou seja, $P(a, b|A, B) \neq P(a|A)P(b|B)$, o que indica a existência de alguma dependência entre os resultados obtidos em cada laboratório. Podemos buscar, então, um modelo complementado com um conjunto de variáveis ocultas³ λ , que obedece a distribuição de probabilidades p_λ com $\int p_\lambda d\lambda = 1$, tal que consigamos recuperar a fatorabilidade da quantidade (2.26). Da definição de probabilidade condicional, é possível escrever

$$P(a, b|A, B, \lambda) = P(a|b, A, B, \lambda)P(b|A, B, \lambda), \quad (2.27)$$

que pode ser melhor tratada sob as hipóteses de determinismo e localidade, como descritas na referência [43]. A primeira implica que $a = a(A, B, \lambda)$ e $b = b(A, B, \lambda)$, ou seja, os resultados obtidos só dependem dos parâmetros que definem o cenário físico, a saber, os observáveis a serem medidos e o conjunto de variáveis ocultas associado à preparação. Isso nos permite substituir $P(a|b, A, B, \lambda)$ por $P(a|A, B, \lambda)$. A segunda hipótese garante que as escolhas de Bob não afetam o resultado a obtido por Alice, o que leva a $P(a|A, B, \lambda) = P(a|A, \lambda)$ e à versão equivalente para o resultado b . Feitas essas considerações, têm-se

³Escolhemos aqui assumir um conjunto de variáveis ocultas de espectro contínuo. Poderíamos também ter o caso em que λ descreve um conjunto de variáveis discretas e isso não mudaria os efeitos aqui estudados. Neste caso, a restrição apresentada seria que $\sum p_\lambda = 1$.

que a Eq. (2.27) pode ser reescrita como

$$P(a, b|A, B, \lambda) = P(a|A, \lambda)P(b|B, \lambda), \quad (2.28)$$

retomando, como queríamos, a fatorabilidade da probabilidade conjunta. Podemos, finalmente, tomar a distribuição de probabilidades medida como

$$\begin{aligned} P(a, b|A, B) &= \int d\lambda \, p_\lambda \, P(a, b|A, B, \lambda) \\ &= \int d\lambda \, p_\lambda \, P(a|A, \lambda)P(b|B, \lambda), \end{aligned} \quad (2.29)$$

que é a expressão comumente apresentada na literatura como critério de localidade [44].

Outra construção importante para a obtenção da desigualdade CHSH é o cálculo de valores esperados para este modelo de variáveis ocultas locais, dado genericamente por

$$\begin{aligned} \langle A \otimes B \rangle &= \int da \, db \, P(a, b|A, B) \, a \, b \\ &= \int d\lambda \, p_\lambda \, \left(\int da \, P(a|A, \lambda) \, a \right) \left(\int db \, P(b|B, \lambda) \, b \right) \\ &= \int d\lambda \, \langle A \rangle_\lambda \, \langle B \rangle_\lambda. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Considerando o conjunto total dos observáveis à disposição de Alice e Bob, $\{A, A', B, B'\}$, vamos construir a quantidade

$$S = |\langle A \otimes B \rangle + \langle A \otimes B' \rangle + \langle A' \otimes B \rangle - \langle A' \otimes B' \rangle|, \quad (2.31)$$

que, com o auxílio da Eq. (2.30), é equivalente a $|\int d\lambda \, p_\lambda \, S_\lambda|$, onde

$$S_\lambda = \langle A \rangle_\lambda (\langle B \rangle_\lambda + \langle B' \rangle_\lambda) + \langle A' \rangle_\lambda (\langle B \rangle_\lambda - \langle B' \rangle_\lambda). \quad (2.32)$$

Como consequência da desigualdade triangular, tem-se que

$$\left| \left[\int d\lambda \, p_\lambda \, S_\lambda \right] \right| \equiv S \leq \int d\lambda \, p_\lambda \, |S_\lambda|, \quad (2.33)$$

ou ainda,

$$|S_\lambda| \leq |\langle A \rangle_\lambda| |\langle B \rangle_\lambda + \langle B' \rangle_\lambda| + |\langle A' \rangle_\lambda| |\langle B \rangle_\lambda - \langle B' \rangle_\lambda|. \quad (2.34)$$

Agora examinaremos a imposição sobre o espectro dos observáveis em questão e aqui há uma diferença crucial entre a derivação que propomos e aquelas mais tradicionais da

desigualdade CHSH⁴. Seja O um observável genérico de autovalores o . Nossa principal hipótese é de que o espectro de O seja limitado, isto é, $o_{\min} \leq o \leq o_{\max}$, mas não nos detemos ao caso discreto ou contínuo, ainda que sigamos tomando a notação para o último caso. Ora, não é difícil perceber que o valor esperado de O também deve estar limitado de tal maneira que

$$\langle O \rangle_\lambda \leq \int do P(o|O, \lambda) o_{\max} = o_{\max}, \quad (2.35)$$

$$\langle O \rangle_\lambda \geq \int do P(o|O, \lambda) o_{\min} = o_{\min}, \quad (2.36)$$

o que implica que

$$|\langle O \rangle_\lambda| \leq \bar{o}, \quad (2.37)$$

com $\bar{o} = \max\{|o|_{\min}, |o|_{\max}\}$.

Aplicando-se, então, a hipótese de que $\{A, A', B, B'\}$ são operadores limitados e utilizando-se dos resultado acima, é imediato reescrever a Eq. (2.34) como

$$|S_\lambda| \leq \max\{\bar{a}, \bar{a}'\} [|\langle B \rangle_\lambda + \langle B' \rangle_\lambda| + |\langle B \rangle_\lambda - \langle B' \rangle_\lambda|], \quad (2.38)$$

onde \bar{a} e \bar{a}' são os limites associados aos observáveis A e A' , respectivamente. O termo que permanece entre colchetes pode ser tratado como a seguir. Defina $\alpha \equiv |x+y| + |x-y| \geq 0$ para $\{x, y\} \in \mathbb{R}$, tal que por uma simples manipulação algébrica tenha-se $\alpha^2 = 2(x^2 + y^2 + |x^2 - y^2|) = 4 \max\{x^2, y^2\}$, que implica diretamente em $\alpha = 2 \max\{|x|, |y|\}$. Aplicando isso à Eq. (2.38), temos

$$|S_\lambda| \leq 2 \max\{\bar{a}, \bar{a}'\} \max\{\bar{b}, \bar{b}'\}, \quad (2.39)$$

sendo \bar{b} e \bar{b}' os limites, respectivamente, de B e B' . Como $S \leq \int d\lambda p_\lambda |S_\lambda|$, então podemos afirmar finalmente que

$$S \leq 2 \max\{\bar{a}, \bar{a}'\} \max\{\bar{b}, \bar{b}'\}, \quad (2.40)$$

que pode ser entendido como uma generalização da CHSH, recuperada em sua forma original pelo vínculo $\max\{\bar{a}, \bar{a}'\} \max\{\bar{b}, \bar{b}'\} = 1$.

Ressaltamos que o resultado (2.40) generaliza a desigualdade CHSH em sua forma usual em dois importantes aspectos. Primeiro, ela contempla observáveis com diferentes espectros, em contrapartida à hipótese tradicional de que os operadores que descrevem as

⁴Hipótese como esta – de construir uma desigualdade CHSH para observáveis limitados – pode ser encontrada na literatura, por exemplo, em [45].

medidas possíveis nos dois laboratórios compartilham o mesmo espectro. Segundo, e mais importante, ela se aplica a quaisquer observáveis limitados, não importando se trata-se de operadores com espectro discreto ou contínuo. Espectro limitado é, portanto, o ponto crucial por trás da inequação (2.40).

A Mecânica Quântica viola (2.40) já em previsão teórica. Para o cenário usual, sabe-se que o limite alcançado por ela para a quantidade $S(A_1, A_2, B_1, B_2)$ é $2\sqrt{2}$ [46], o que corrobora o teorema de Bell, que justamente previa que nenhuma teoria local e realista poderia reproduzir completamente a Mecânica Quântica; esta alcança um limite maior que a outra. Estados puros emaranhados, por exemplo, sempre violam a desigualdade CHSH [47], o que indica que estes formam um caso incompatível com o realismo local. De maneira mais geral, creio ser um bom momento para enunciarmos aqui um teorema estabelecido em 1991 pelo físico suíço Nicolas Gisin [18]:

Teorema 2 (Teorema de Gisin) *Todo estado quântico puro de dois q -bits não separável viola uma desigualdade de Bell.*

O teorema de Gisin foi generalizado em 2012 [19] para sistemas de N partículas e reforça o fato de que violações das desigualdades de Bell formam uma condição suficiente a estados emaranhados e, portanto, revelam que este é um comportamento possível à Mecânica Quântica e essencialmente incompatível com qualquer mímica proposta por uma teoria local [32].

Capítulo 3

Emaranhamento de variáveis contínuas em TVOs

Dedicaremos este capítulo a construir aquele que será nosso modelo de variáveis ocultas. Partiremos da formulação liouvillianiana da Mecânica Clássica, que se aproxima do cenário de *ensembles* estatísticos, a fim de tratar a dinâmica, não de um ponto, mas de uma região do espaço de fase $q \times p$, capaz de se deformar no tempo por efeito das trajetórias individuais de cada ponto que a compõe. Essas trajetórias - *a priori* bem aceitas como locais - fazem o papel das variáveis ocultas com as quais tentaremos reproduzir a dinâmica quântica, por exemplo, do operador densidade. Este caminho já está proposto na literatura, sobretudo no texto que motiva este trabalho [20]. Seguiremos os passos desta referência para avaliar as correlações quântica e clássica num sistema de variáveis contínuas, no objetivo de entender o quão próximo o conceito de separabilidade de um estado clássico pode chegar na tentativa de reproduzir o emaranhamento quântico.

3.1 Mecânica Liouvillianiana

A Mecânica Clássica, em suas formulações usuais, parte da premissa de que é possível conhecer as variáveis de posição e momento que caracterizam o estado inicial de um sistema físico e as interações a que está sujeito de modo a prever univocamente, em geral, o estado desse sistema em qualquer instante posterior de tempo. Um formalismo fundamentalmente diferente pode ser obtido inspirado no assim chamado teorema de Liouville, considerando-se um enunciado distinto: não é possível determinar com precisão absoluta os valores de posição e momento, por exemplo, de um sistema físico. Essa incerteza pode vir tanto de uma limitação experimental (fruto de um permanente erro propagado por escalas nos instrumentos de medida), como também do desconhecimento sobre as condições iniciais de um experimento, como o que ocorre, em geral, para sistemas de muitas partículas.

Na formulação hamiltoniana da Mecânica, por exemplo, um sistema físico tem seu estado inicial descrito por um ponto (q_0, p_0) no espaço de fase e a evolução dessas quantidades sob um hamiltoniano H é determinada pelas equações

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{e} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (3.1)$$

que dão origem a uma trajetória nesse espaço formada pelos pontos $(q(t), p(t))$. Tomando a nova abordagem apresentada no parágrafo anterior, podemos imaginar que o estado inicial é agora representado por uma região no espaço de fase formada por diversos pontos, cada um representando um estado atrelado a uma probabilidade de ser o que melhor descreve o sistema em $t = 0$. A esta região nos referiremos por \mathcal{R}_0 e à distribuição de probabilidades associada a ela, por $P_0(q, p) \equiv P(q, p, t = 0)$. Nas referências [48] e [49], há demonstrações bastante completas acerca do fato de que transformações canônicas mudam, eventualmente, a forma de uma região no espaço de fase sem, no entanto, alterar o seu volume, para um sistema conservativo. Este resultado, quando atribuído à transformação canônica que descreve a evolução temporal, é o que se conhece como teorema de Liouville.

Teorema 3 (Teorema de Liouville) *Seja \mathcal{R}_0 a região do espaço de fase que descreve o estado inicial de um sistema físico conservativo. Se este evolui no tempo para um estado descrito por \mathcal{R}_t no instante t , os volumes de \mathcal{R}_0 e \mathcal{R}_t são iguais. A evolução temporal preserva o volume de uma região no espaço de fase.*

O que estamos chamando portanto de Mecânica Liouvillianiana é um tratamento da Mecânica Clássica através de elementos da teoria de *ensembles* estatísticos. O estado a que se tem acesso é um conjunto de pontos do espaço de fase contidos numa região cujo volume é mantido constante ainda que sua forma seja alterada. A este conjunto de pontos está associada a distribuição de probabilidades P que também obedecerá a uma dinâmica específica, da qual passaremos a tratar agora. Além da conservação do volume, garantida pelo teorema anterior, a conhecida unicidade das equações de Hamilton [49] implica na conservação do número de estados que compõem uma região no espaço $q \times p$ que evolui sob transformações canônicas, já que cada ponto $(q(t), p(t))$ é fruto da evolução de um ponto específico (q_0, p_0) . Feitas essas observações, não é difícil perceber que

$$\frac{dP}{dt} = 0, \quad (3.2)$$

o que é equivalente [48] a

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \{P, H\} = 0, \quad (3.3)$$

ou ainda

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\{P, H\}, \quad (3.4)$$

que é conhecida como Equação de Liouville. O lado direito da Eq. (3.4) faz uso do colchete de Poisson entre P e H , definido por

$$\{P, H\} = \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}. \quad (3.5)$$

A solução da Eq. (3.4) é conhecida [50] e pode ser escrita como

$$P(q, p, t) = P_0(q(-t), p(-t)), \quad (3.6)$$

cujas interpretação sugere uma evolução retroativa no tempo das variáveis q e p que descreviam o estado inicial. Tratar a dinâmica de um problema no formalismo liouvillian envolve então três passos fundamentais:

- Determinar a distribuição inicial de probabilidades $P_0(q, p)$ para o sistema em questão.
- Construir, via equações de Hamilton, as funções $q(t)$ e $p(t)$.
- Escrever $P_0(q(-t), p(-t))$, a distribuição de probabilidades evoluída ao tempo t .

Esta formulação nos é particularmente útil neste trabalho se for possível construir um paralelismo entre a distribuição de probabilidades clássica P e o operador densidade quântico ρ cuja interpretação também está associada à estatística de *ensembles*. Felizmente esta conexão é possível e bem estabelecida, tomando P como a projeção de ρ no espaço dos estados coerentes, os quais apresentaremos brevemente a seguir.

A crucial diferença entre as dinâmicas de P e ρ é que a primeira evolui preservando o conceito de trajetória, isto é, cada ponto evolui por uma trajetória específica no espaço de fase - não necessariamente acessível, mas existente - à medida que o tempo passa, enquanto que para o cenário quântico não há um equivalente para este conceito. A proposta, então, é pensar a Mecânica Liouvillian como uma teoria clássica (local e realista, *a priori*) de variáveis ocultas (as trajetórias em si) e avaliar até que ponto ela é capaz de reproduzir resultados da Mecânica Quântica.

3.1.1 Estados coerentes canônicos

Vamos dedicar aqui algumas palavras à definição e às propriedades dos estados coerentes dado que eles são peça chave para fazer a ponte entre as descrições quântica e liouvillian de um sistema físico.

Os estados coerentes foram estudados inicialmente por Schrödinger em 1926 [51] e retomados nos anos 1960 por Klauder, Glauber e Sudarshan [52, 53, 54] com grande interesse pela sua aplicação na descrição dos estados de radiação eletromagnética coerente [55]. Na representação de Fock, os estados coerentes associados a um oscilador harmônico de massa m e frequência ω são rotulados por uma variável complexa [56]

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{q}{b} + i \frac{bp}{\hbar} \right), \quad (3.7)$$

onde $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, e têm a forma

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.8)$$

Por simplicidade, a partir deste ponto, tomaremos $m = \omega = 1$, o que leva à releitura da Eq. (3.7), simplificando-a para

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (q + ip). \quad (3.9)$$

Nota-se que os estados coerentes nada mais são que uma superposição infinita de autoestados de energia do oscilador harmônico e que apresentam algumas propriedades interessantes das quais destacamos quatro a seguir.

Autoestado do operador aniquilação. Pode-se definir um estado coerente através da equação

$$a|z\rangle = z|z\rangle \quad (3.10)$$

ou de sua equivalente no espaço dual,

$$\langle z|a^\dagger = z^*\langle z|, \quad (3.11)$$

onde a e a^\dagger são, respectivamente, os operadores de aniquilação e criação usuais do oscilador harmônico.

Aplicação do operador deslocamento ao estado de vácuo. O estado coerente $|z\rangle$ é construído aplicando-se o operador deslocamento,

$$D(z) = \exp(za^\dagger - z^*a), \quad (3.12)$$

ao estado de vácuo $|0\rangle$ do oscilador harmônico. Ou seja, $|z\rangle = D(z)|0\rangle$.

Estados de mínima incerteza. Tomando-se os valores médios de q e p com auxílio

dos estados coerentes obtém-se o valor mínimo da relação de incerteza, isto é,

$$\Delta p \Delta q = \frac{\hbar}{2}. \quad (3.13)$$

Base completa não ortogonal. É possível mostrar que os estados coerentes formam uma base supercompleta, ou seja,

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{Z}} |z\rangle \langle z| d^2 z = \mathbb{I}, \quad (3.14)$$

sem, no entanto, apresentarem ortogonalidade entre si. Dois estados coerentes distintos têm produto interno não nulo,

$$\langle z_a | z_b \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} |z_a|^2 + z_a^* z_b - \frac{1}{2} |z_b|^2 \right]. \quad (3.15)$$

Aqui é relevante dizer que estes são os estados quânticos cuja evolução mais se compara a de estados clássicos por preservar a forma e coerência sob um hamiltoniano $H = \hbar\omega (a^\dagger a + \frac{1}{2})$. Nosso objetivo, portanto, é agora utilizá-los para conectar a distribuição inicial para a teoria clássica e o estado inicial quântico descrito pelo operador densidade.

3.1.2 Distribuição inicial clássica

Considerando um estado quântico puro bitartido que, no instante $t = 0$, é descrito pelo operador densidade ρ_0 , desejamos construir uma distribuição de probabilidades que sirva como estado inicial no formalismo liouvilliano. Para isso podemos tomar a projeção de ρ_0 no espaço de estados coerentes através de duas construções conhecidas: as distribuições de Husimi e de Wigner¹. A primeira, que é sempre positiva por construção, é determinada por

$$P^{(H)} = \frac{\langle z_a z_b | \rho_0 | z_a z_b \rangle}{N}, \quad (3.16)$$

ou ainda, nesse contexto,

$$P^{(H)} = \frac{|\langle z_a z_b | \psi_0 \rangle|^2}{N}, \quad (3.17)$$

¹A distribuição de Wigner deve ser tomada com cuidado para o fim desejado, pois *a priori* ela aceita valores negativos, o que a desqualificaria como distribuição de probabilidades. No contexto deste trabalho, no entanto, não há impasse quanto a isso, pois, para estados coerentes, a distribuição de Wigner é sempre positiva [57].

onde N é constante de normalização. Já a distribuição de Wigner [58] pode ser obtida aqui por

$$P^{(W)} = N \int dv' dv'' e^{\frac{2ip_a v'}{\hbar}} e^{\frac{2ip_b v''}{\hbar}} \langle q_a - v' | \langle q_b - v'' | \rho_0 | q_b + v'' \rangle | q_a + v' \rangle. \quad (3.18)$$

Estas serão as fórmulas que usaremos para encontrar a distribuição clássica inicial condizente com ρ_0 . É sabido que, assim como acontece no contexto quântico, ainda que P_0 possa ser escrita de maneira separada para cada um dos subespaços que compõem o sistema físico em questão, ao permitir sua evolução sob um hamiltoniano de interação entre eles, não deve mais ser possível fatorar em P as quantidades ligadas exclusivamente a um único destes subespaços. Essa não-separabilidade clássica é uma correlação capaz de, como já discutido na literatura, reproduzir o que ocorre com a dinâmica do emaranhamento no cenário quântico.

Vamos construir, para utilização posterior, a distribuição clássica associada a um estado coerente bipartido inicialmente separável. Temos, então,

$$\rho_0 = |z_{a_0}\rangle\langle z_{a_0}| \otimes |z_{b_0}\rangle\langle z_{b_0}|, \quad (3.19)$$

pertencente ao espaço $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$. Vemos, por exemplo, que a função de Husimi é facilmente calculada neste caso, pois assume a forma

$$P_0^{(H)} = \frac{1}{N} |\langle z_{a_0} z_{b_0} | z_a z_b \rangle|^2 \quad (3.20)$$

e o produto interno entre dois estados coerentes já está estabelecido na Eq. (3.15). Lembrando da parametrização definida na Eq. (3.7) e impondo de maneira usual a condição de normalização, obtemos P_0 como uma distribuição gaussiana centrada nas variáveis de posição e momento do estado inicial dada por

$$P_0^{(H)} = \frac{1}{4\hbar^2\pi^2} \exp \left[-\frac{(q_a - q_{a_0})^2 + (q_b - q_{b_0})^2 + (p_a - p_{a_0})^2 + (p_b - p_{b_0})^2}{2\hbar} \right], \quad (3.21)$$

que é a expressão obtida para o cálculo da distribuição inicial, quando tomada via função de Husimi. Por um caminho semelhante, encontra-se a expressão

$$P_0^{(W)} = \frac{1}{\hbar^2\pi^2} \exp \left[-\frac{(q_a - q_{a_0})^2 + (q_b - q_{b_0})^2 + (p_a - p_{a_0})^2 + (p_b - p_{b_0})^2}{\hbar} \right] \quad (3.22)$$

para a distribuição clássica inicial, quando tomada via função de Wigner.

Finalmente, temos agora todos os elementos necessários ao estudo da dinâmica clássica, via formalismo liouvillian, em comparação à dinâmica quântica.

3.2 Medidas de correlação clássica

Já apresentamos no capítulo anterior o conceito bem estabelecido de pureza quântica e como usá-la para medir o emaranhamento em sistemas compostos. Neste momento, vamos introduzir a construção de uma medida de pureza para sistemas clássicos a fim de termos expressões que captem de maneira equivalente as correlações nos contextos clássico e quântico.

Uma vez definido o equivalente “clássico” do traço de um operador em Mecânica Quântica como a integração da distribuição global de probabilidades no conjunto de variáveis de posição e momento, podemos escrever uma densidade *marginal* de probabilidades, que fará o papel do operador densidade reduzido, como

$$P_a(q_a, p_a, t) = \int P(q_a, p_a, q_b, p_b, t) dq_b dp_b, \quad (3.23)$$

o que nos leva à definição de pureza clássica associada a este cenário probabilístico, apresentada em [20] e dada por

$$\mathcal{P}_{cl}(P_a) = \frac{\int P_a^2(q_a, p_a, t) dq_a dp_a}{\int P_a^2(q_a, p_a, 0) dq_a dp_a}. \quad (3.24)$$

Ambas as equações acima podem ser escritas da mesma forma para as variáveis do subespaço indexado por b . A normalização da Eq. (3.24), necessária uma vez que não há equivalência bem estabelecida aqui para a propriedade de idempotência do operador ρ , garante inclusive que, em $t = 0$, esta medida assuma o valor máximo de 1, condzendo com o fato de que inicialmente o estado global é separável e, portanto, suas partes são completamente puras (sem correlação). Há de se salientar que a expressão $\int P_a^2(q_a, p_a, 0) dq_a dp_a \neq 0$, o que a qualifica a ocupar o denominador da Eq. (3.24).

Voltemos por um momento ao contexto quântico e permitamos agora ao sistema bipartido com o qual estamos lidando evoluir sob um hamiltoniano do tipo $H = H_a + H_b + H_{int}$, em que $H_{a,b}$ associa-se a uma evolução local no subespaço $\mathcal{H}_{a,b}$ e H_{int} representa um termo de interação entre os subespaços, portanto uma interação não local², capaz de gerar correlações. Nos será útil definir aqui uma nova notação acerca de operadores densidade: seja

$$\varrho_x(t) = [\rho_x(t)]_{H_{int}=0} \quad (3.25)$$

o operador densidade reduzido local associado ao subespaço $x = a, b$, isto é, aquele fruto

²Aqui nos referimos à interação não local no sentido de uma interação que gera acoplamento nas equações de movimento dos subsistemas em questão. Nada tem a ver, *a priori*, com a noção de não localidade de Bell, propriedade revelada, por exemplo, pela violação da desigualdade CHSH.

exclusivo da evolução local associada a H_x . Operacionalmente, pode-se calcular $\varrho_{a,b}$ por

$$\varrho_a(t) = \text{Tr}_b \left[e^{-i(H_a+H_b)t/\hbar} \rho_0 e^{i(H_a+H_b)t/\hbar} \right], \quad (3.26)$$

e seu equivalente para o subespaço \mathcal{H}_b . Com esta definição, é possível estabelecer uma medida de correlação como a diferença existente entre a pureza do estado quando sujeito apenas a transformações locais e aquela quando sujeito a uma interação do tipo não local. Matematicamente, temos

$$\mathcal{C}_x(t) = \mathcal{P}_q(\varrho_x(t)) - \mathcal{P}_q(\rho_x(t)). \quad (3.27)$$

Note-se que, no contexto de um estado inicialmente separável, é fácil perceber que a pureza do operador local não muda no tempo e, portanto, deve ser igual à pureza do estado inicial, isto é, $\mathcal{P}_q(\varrho_x(t)) = \mathcal{P}_q(\rho_{0x})$. Em se tratando de estados puros, há também de se lembrar do capítulo anterior que $\mathcal{P}_q(\rho_{0x}) = 1$ e, finalmente, vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x(t) &= \mathcal{P}_q(\varrho_x(t)) - \mathcal{P}_q(\rho_x(t)) \\ &= \mathcal{P}_q(\rho_{0x}) - \mathcal{P}_q(\rho_x(t)) \\ &= 1 - \mathcal{P}_q(\rho_x(t)) \\ &= S_L(\rho(t)), \end{aligned}$$

o que significa que, neste regime, $\mathcal{C}_x(t)$ é equivalente à entropia linear – medida de emaranhamento – do estado $\rho(t)$.

Passemos ao cenário clássico. Como sabemos relacionar $P(t)$ com $\rho(t)$ e a operação traço de um operador com a integração de uma distribuição de probabilidades, nosso próximo passo será deixar a definição quântica mais amigável à simples releitura por parte da visão clássica liouvillian. Para isso, tomaremos dois cuidados, descritos abaixo:

Normalização. Aproveitando o fato de que $\mathcal{P}_q(\varrho_x(t)) = 1$, podemos dividir a expressão de $\mathcal{C}_x(t)$ por este termo, a fim de explicitar uma oportunidade de normalização quando da transposição desta medida para o contexto clássico. Temos, então,

$$\mathcal{C}_x(t) = 1 - \frac{\mathcal{P}_q(\rho_x(t))}{\mathcal{P}_q(\varrho_x(t))}. \quad (3.28)$$

Assimetria da pureza clássica. Tendo em mente que o análogo clássico da pureza é não-simétrico entre os subespaços que compõem o sistema global, é interessante pensar uma maneira de escrever esta medida blindando-a contra esta assimetria. Para isso

tomamos a medida *global* de correlação quântica como

$$\mathcal{C}^{(q)}(t) = \frac{1}{2} [\mathcal{C}_a(t) + \mathcal{C}_b(t)], \quad (3.29)$$

que, no formalismo quântico, por conta da simetria $\mathcal{P}_q(\rho_a(t)) = \mathcal{P}_q(\rho_b(t))$, se reduz novamente à $S_L(\rho(t))$.

Finalmente estamos prontos para escrever a medida de correlação clássica que estamos buscando. Usando as construções anteriores, definimos

$$\mathcal{C}^{(cl)}(t) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{P_{cl}(P_a(t))}{P_{cl}(P_a(0))} \right) + \left(1 - \frac{P_{cl}(P_b(t))}{P_{cl}(P_b(0))} \right) \right]. \quad (3.30)$$

Outra construção interessante para a medida de correlação pode ser obtida quando avaliamos o que acontece com os valores esperados de um operador quando tomado com estados puros separáveis ou não. Sabe-se [28] que a quantidade

$$\mathcal{E}_{O_1 O_2} = \frac{\langle O_1 \otimes O_2 \rangle}{\langle O_1 \rangle \langle O_2 \rangle}, \quad (3.31)$$

calculada a partir de um estado puro, é igual a 1 se o estado for separável.

Com o auxílio da definição acima, podemos, inspirados pela desigualdade CHSH, olhar para o cenário em que a cada um dos subespaços indexados por a e b está associado um par de operadores (medidas a serem feitas), $\{O_1, O'_1\}$ e $\{O_2, O'_2\}$. Após variadas rodadas do experimento em que cada subespaço é submetido a uma de suas possíveis medidas, permite-se computar a quantidade

$$\mathcal{B} = \mathcal{E}_{O_1 O_2} + \mathcal{E}_{O'_1 O_2} + \mathcal{E}_{O_1 O'_2} - \mathcal{E}_{O'_1 O'_2}, \quad (3.32)$$

tal que $\mathcal{B} = 2$ somente para um estado separável. Com isso $|\mathcal{B} - 2|$ se transforma numa testemunha de emaranhamento, isto é,

$$|\mathcal{B} - 2| > 0 \quad (3.33)$$

indica a presença de não separabilidade no estado com que estamos trabalhando.

Alguns comentários precisam ser feitos sobre a limitação desta definição. Primeiro, ela não é capaz de quantificar o emaranhamento de um sistema; apenas revelá-lo. Isso ocorre também com as desigualdades de Bell: elas revelam a presença de não localidade sem quantificá-la; problema, aliás, em aberto no estudo das testemunhas de correlações quânticas [44]. Segundo, o denominador de $\mathcal{E}_{O_1 O_2}$ pode se anular, eventualmente, o que cria um regime no qual o tratamento acima é ineficiente, perde confiabilidade. Terceiro, há a possibilidade de que, mesmo para um estado emaranhado, numerador e denominador sejam iguais a 1 no lado direito da Eq. (3.31), o que faz do resultado discutido acima

uma condição necessária mas não suficiente para revelar emaranhamento. No entanto, sobre todas estas limitações ressaltamos que a Eq. (3.32) lida diretamente com valores esperados e isso é o que, no fundo, se acessa experimentalmente, dando uma justificação pela qual cremos estar ali uma maneira interessante do ponto de vista operacional de se testemunhar a presença de emaranhamento em um sistema físico.

3.3 Acoplamento bilinear

Retomemos agora o caso de um estado coerente bipartido inicialmente separável $|\psi_0\rangle = |z_{a0}\rangle|z_{b0}\rangle$. Considere que este evolua sob um hamiltoniano do tipo $H = \lambda\hat{Q}_a\hat{Q}_b$, com λ sendo um parâmetro de acoplamento entre os subespaços e \hat{Q} o operador posição usual. Vamos avaliar a seguir as medidas quântica e clássica de correlação.

3.3.1 Correlação quântica

O estado inicial pode ser representado pelo operador

$$\rho_0 = |z_a z_b\rangle\langle z_a z_b|, \quad (3.34)$$

e sua evolução no tempo é da forma

$$\rho(t) = U(t)|z_a z_b\rangle\langle z_a z_b|U^\dagger(t). \quad (3.35)$$

Sabendo que o traço de um operador independe da base em que é calculado, podemos construir o estado reduzido ao subespaço \mathcal{H}_a com a ajuda dos autoestados de \hat{Q}_b , que obedecem a relação $\hat{Q}_x|q_x\rangle = q_x|q_x\rangle$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \rho_a(t) &= \text{Tr}_b(\rho(t)) \\ &= \int dq'_b \langle q'_b | \rho(t) | q'_b \rangle. \end{aligned} \quad (3.36)$$

E ainda,

$$\rho_a^2(t) = \int dq'_b dq''_b \langle q'_b | \rho(t) | q'_b \rangle \langle q''_b | \rho(t) | q''_b \rangle. \quad (3.37)$$

Usando a relação de completeza $\int dq''_a |q''_a\rangle\langle q''_a| = \mathbb{I}$ na Eq. (3.37) e tomando mais uma vez

o traço, mas agora na base $\{|q'_a\rangle\}$ ficamos com

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_q &= \text{Tr}(\rho_a^2(t)) \\ &= \int dq'_a dq''_a dq'_b dq''_b \langle q'_a q'_b | \rho | q'_b q'_a \rangle \langle q''_a q''_b | \rho | q''_b q''_a \rangle.\end{aligned}\quad (3.38)$$

Analizando brevemente o comportamento de um termo semelhante aos argumentos da integração acima, vemos que

$$\begin{aligned}\langle x_1 y_1 | \rho(t) | x_2 y_2 \rangle &= \langle x_1 y_1 | e^{(-iXYt/\hbar)} | z_{a0} z_{b0} \rangle \langle z_{a0} z_{b0} | e^{(iXYt/\hbar)} | x_2 y_2 \rangle \\ &= e^{[-\frac{i\lambda t}{\hbar}(x_1 y_1 - x_2 y_2)]} \langle x_1 | z_{a0} \rangle \langle y_1 | z_{b0} \rangle \langle z_{a0} | x_2 \rangle \langle z_{b0} | y_2 \rangle.\end{aligned}\quad (3.39)$$

Os produtos internos que aparecem no resultado acima são conhecidos [59]:

$$\langle q | z \rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\hbar}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{q}{\sqrt{\hbar}} - z\sqrt{2} \right)^2 + \frac{z}{2} (z - z^*) \right]. \quad (3.40)$$

Isso nos permite calcular completamente a pureza quântica para este estado como função do tempo, através da integração de sucessivas funções gaussianas. Ao final deste processo, obtém-se, pela Eq. (3.29),

$$\mathcal{C}^{(q)}(\tau) = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2}, \quad (3.41)$$

com $\tau = \lambda t$ fazendo o papel de um tempo adimensional. O gráfico da Figura 3.1 apresenta a evolução desta quantidade no tempo. Nota-se que, como esperado, não há correlação em $\tau = 0$ e que $\mathcal{C}^{(q)} = 1$ é assíntota horizontal, sendo este valor atingido apenas quando a pureza quântica fosse identicamente nula (cada subestado perdesse completamente sua pureza), após um tempo infinito de interação.

3.3.2 Correlação clássica

O cálculo da correlação clássica aqui é sensivelmente mais simples. A distribuição de probabilidades que representa o estado inicial já foi calculada e é representada pela Eq. (3.22). Considerando o hamiltoniano clássico³ $H = \lambda q_a q_b$, com q_x sendo a variável

³Este hamiltoniano é constituído apenas de um termo de interação, ou seja, não há termos “cinéticos”. Isso nos parece oportuno uma vez que, dado o objetivo deste trabalho, é o termo de interação que guarda as propriedades que permitirão o surgimento de uma dinâmica de correlações.

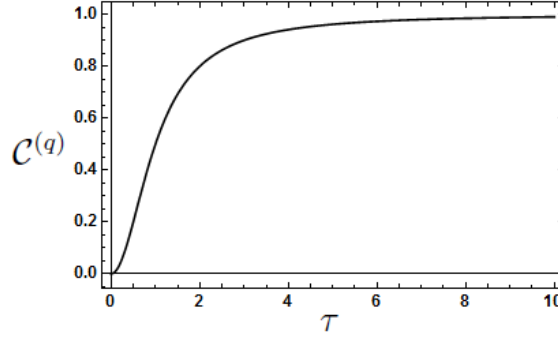


Figura 3.1: Correlação quântica ($\mathcal{C}^{(q)}$) em função do tempo adimensional τ para um estado coerente bipartido inicialmente separável que evolui sob o hamiltoniano $H = \lambda \hat{Q}_a \hat{Q}_b$.

canônica de posição usual, temos as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} q_a(t) &= q_a, \\ q_b(t) &= q_b, \end{aligned}$$

para as posições, e

$$\begin{aligned} p_a(t) &= p_a - \lambda t q_b, \\ p_b(t) &= p_b - \lambda t q_a, \end{aligned}$$

para os momentos.

A fim de construir a distribuição $P(t) \equiv P(q_a, q_b, p_a, p_b, t)$, reescrevemos a Eq. (3.22) inserindo nas respectivas posições as funções $q_a(-t)$, $q_b(-t)$, $p_a(-t)$ e $p_b(-t)$. Com isso,

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^2} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{(q_a - q_{a0})^2 + (q_b - q_{b0})^2 + (p_b - p_{b0} + q_a \lambda t)^2 + (p_a - p_{a0} + q_b \lambda t)^2}{\hbar} \right]. \end{aligned}$$

Dada a particularidade de que este é um sistema inicialmente separável, tem-se que $\mathcal{P}_{cl}(P_a(0)) = \mathcal{P}_{cl}(P_b(0)) = 1$. Resta-nos calcular $\mathcal{P}_{cl}(P_a(t))$ e $\mathcal{P}_{cl}(P_b(t))$, o que, mais uma vez, requer sucessivas integrações gaussianas. Percebemos, ao fim deste processo, que

$$\mathcal{C}^{(cl)}(\tau) = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2}, \quad (3.42)$$

onde, novamente, τ é um tempo adimensional. O gráfico de $\mathcal{C}^{(cl)}$ é mostrado na Figura 3.2 cuja curva é idêntica à construída para $\mathcal{C}^{(q)}$. Há de sublinhar que a perfeita coincidência das curvas foi obtida quando optamos por construir o estado clássico inicial com o auxílio da função de Wigner. O perfil da distribuição inicial, aqui, é relevante para a eficiência

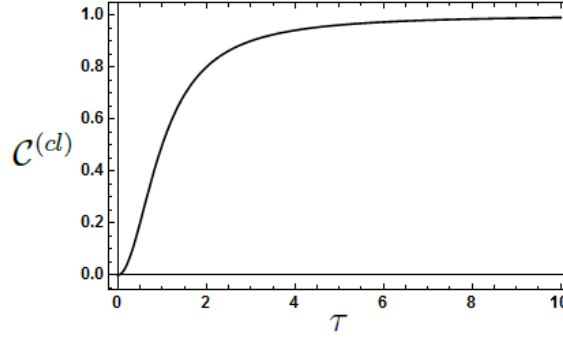


Figura 3.2: Correlação clássica ($C^{(cl)}$) em função do tempo adimensional τ para um estado bipartido inicialmente separável que evolui sob o hamiltoniano $H = \lambda q_a q_b$.

da reprodução de correlações. Se tivéssemos optado pela função de Husimi e partido do estado (3.21), a concordância entre as correlações quântica e clássica persistiria, ainda que não tão exata quanto no resultado aqui apresentado.

Este exemplo, mais que uma inspiração, seguiu como receita a referência [20], onde outros dois casos mais gerais são estudados, mostrando que há, ainda que nem sempre coincidência tal qual a obtida aqui, concordância entre as medidas clássica e quântica: passam cada uma por máximos e mínimos locais e anulam-se em instantes iguais de tempo, crescem e decrescem juntas e apresentam o mesmo caráter oscilatório, por exemplo. Tudo isso deixa uma pergunta em aberto que tentaremos estabelecer a seguir.

Antes, porém, olhemos brevemente sobre como a medida definida pela Eq. (3.32) contribui para este exemplo. Tomando $O_1 = \hat{Q}_1$, $O'_1 = \hat{P}_1$, $O_2 = \hat{Q}_2$ e $O'_2 = \hat{P}_2$, recorreremos à representação de Heisenberg [27], em que os operadores evoluem no tempo, tal que $\hat{X}(t) = U^\dagger(t)\hat{X}U(t)$, enquanto os vetores de estado permanecem constantes. Calculamos os valores esperados através da Eq. (2.5), nos valendo mais uma vez de que o traço de um operador independe da base. Ficamos, por exemplo, com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\langle \hat{Q}_{1,2} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_{1,2} q_{1,2} |\langle q_{1,2} | z_{10,20} \rangle|^2, \\ \langle \hat{Q}_1 \hat{Q}_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 dq_2 q_1 q_2 |\langle q_1 | z_{10} \rangle|^2 |\langle q_2 | z_{20} \rangle|^2, \\ \langle \hat{P}_{1,2} \rangle &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dq_{1,2} \langle z_{10,20} | q_{1,2} \rangle \frac{\partial \langle q_{1,2} | z_{10,20} \rangle}{\partial q_{1,2}}, \\ \langle \hat{P}_1 \hat{P}_2 \rangle &= \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 dq_2 \langle z_{10} | q_1 \rangle \langle z_{20} | q_2 \rangle e^{\frac{i q_1 q_2 \lambda t}{\hbar}} \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} \left[e^{-\frac{i q_1 q_2 \lambda t}{\hbar}} \langle q_1 | z_{10} \rangle \langle q_2 | z_{20} \rangle \right].\end{aligned}$$

Os produtos internos que aparecem nas expressões acima estão estabelecidos na Eq.

(3.40) e, após o processo de integração, chegamos ao resultado

$$\mathcal{B}^{(q)} = \frac{q_{10}p_{20} - \left[\frac{1}{2} + \frac{q_{10}^2}{\hbar}\right] \tau \hbar}{q_{10}p_{20} - q_{10}^2 \tau} + \frac{q_{20}p_{10} - \left[\frac{1}{2} + \frac{q_{20}^2}{\hbar}\right] \tau \hbar}{q_{20}p_{10} - q_{20}^2 \tau}. \quad (3.43)$$

No caso clássico, partimos da distribuição inicial, construída via função de Husimi e dada pela Eq. (3.22). Aqui, o valor esperado de qualquer função $f(q_1, q_2, p_1, p_2)$ será calculado por

$$\langle f(q_1, q_2, p_1, p_2) \rangle = \int P(t) f(q_1, q_2, p_1, p_2) dq_1 dq_2 dp_1 dp_2, \quad (3.44)$$

o que nos leva a encontrar para $\mathcal{B}^{(cl)}$, depois das integrações necessárias, a mesma expressão de $\mathcal{B}^{(q)}$, corroborando com a equivalência entre as medidas de correlação clássica e quântica que obtivemos acima.

Seja pelas medidas $\mathcal{C}^{(q)}$ e $\mathcal{C}^{(cl)}$ ou pela quantidade $|\mathcal{B} - 2|$, fica, então, evidenciado que há confiabilidade em afirmar que, pelo menos em certos regimes, é possível reproduzir exatamente emaranhamento através da inseparabilidade de estados clássicos.

Motivamos esta dissertação com uma revisão que girava ao redor do teorema de Bell e da incapacidade de qualquer teoria local reproduzir a Mecânica Quântica. Neste momento, no entanto, espero que o leitor perceba o impasse a que chegamos quando, partindo de uma teoria clássica, baseada em trajetórias locais, conseguimos reproduzir fielmente a dinâmica do emaranhamento quântico. Mais que isso, no contexto em que estamos trabalhando – o dos estados puros –, emaranhamento e não localidade de Bell se confundem, coincidem, praticamente são sinônimos [18]. Portanto, ao construir uma teoria de variáveis ocultas locais (TVOL) e com ela conseguir prever corretamente o emaranhamento, estamos também prevendo não localidade. Mas como isso é possível? Como pode uma teoria local prever não localidade quântica? Estamos diante de uma demonstração de compatibilidade entre a Mecânica Quântica e uma TVOL, em conflito gritante com o teorema de Bell? Na tentativa de dar resposta a estas perguntas, vamos mudar o cenário e explorar o que acontece em um espaço discreto, como o dos estados de spin. Lá, há maneiras bem estabelecidas de se medir não localidade e, portanto, explorar melhor o que há por trás deste impasse.

Capítulo 4

Emaranhamento e não localidade para variáveis discretas em TVOs

Neste capítulo, mudaremos o cenário sobre o qual estamos trabalhando. Passaremos a tratar sobre as dinâmicas do emaranhamento e da não localidade para sistemas de spins. Inspirados pelo que foi dito até aqui, precisamos avaliar as correlações quânticas que surgem no tempo para um estado bipartido evoluindo sob um hamiltoniano de interação e depois comparar este resultado com as correlações presentes no modelo clássico equivalente. Além do fato de possibilitar a construção de uma base discreta, trabalhar com o spin nos é particularmente favorável pois, igualmente ao problema do oscilador harmônico, podemos construir estados coerentes capazes de auxiliar na ponte entre os contextos quântico e clássico. Por outro lado, precisaremos ser mais cuidadosos em compôr um modelo realista para o spin, visto que não há, *a priori*, uma contrapartida clássica para o mesmo. Iniciamos, portanto, este capítulo apresentando os estados coerentes de spin e partindo para as medidas de emaranhamento quântico. Em seguida, montaremos o modelo clássico e, mais uma vez, via Mecânica Liouvillian, estudaremos sua dinâmica de correlação. Finalmente, desejamos avaliar a não localidade em ambos os contextos, submetendo cada modelo a uma desigualdade de Bell.

4.1 Estados coerentes de spin

Em 1971, Radcliffe publica um trabalho [60] mostrando que há estados de spin análogos aos estados coerentes do oscilador harmônico e é seguido por Gilmore [61, 62] e Perelomov [63]. É sobre a definição e as propriedades destes estados que pretendemos tratar nesta seção.

Estados quânticos que descrevem partículas de spin j pertencem ao espaço de Hilbert de dimensão finita $2j + 1$ com uma base ortonormal dada pelo conjunto $|j, m\rangle$, com $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$, que são autoestados simultâneos dos operadores J_z (spin na

direção z) e J^2 , isto é,

$$J_z|j, m\rangle = m\hbar|j, m\rangle, \quad (4.1)$$

$$J^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle. \quad (4.2)$$

As relações de comutação que caracterizam esta álgebra são dadas por

$$[J_a, J_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} J_c, \quad (4.3)$$

onde ε_{abc} é o símbolo de Levi-Civita e a, b e c podem assumir quaisquer elementos de x, y, z . É útil definir os operadores não hermitianos $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$, cuja atuação sobre os autoestados de J_z é similar aos operadores de criação e aniquilação do oscilador harmônico. Com eles é possível definir o operador deslocamento da álgebra $SU(2)$ para um parâmetro complexo w ,

$$D(w) = \exp \left[\frac{\arctan |w|}{|w|} (wJ_+ - w^*J_-) \right], \quad (4.4)$$

tal que nos seja possível construir o estado coerente de spin $|w\rangle$ a partir da atuação de $D(w)$ ao estado de mais baixa energia $|j, -j\rangle$ que, com o auxílio da fórmula BCH [27], assume a forma geral

$$|w\rangle = \frac{1}{(1 + |w|^2)^2} \sum_{k=0}^{2j} w^k \sqrt{\frac{2j!}{(2j-k)!k!}} |j, -j+k\rangle. \quad (4.5)$$

Da mesma forma que no contexto do oscilador harmônico, os estados coerentes de spin são, em geral, não ortogonais. Aqui,

$$\langle w_a | w_b \rangle = \frac{(1 + w_a^* w_b)^{2j}}{(1 + |w_a|^2)^j (1 + |w_b|^2)^j}, \quad (4.6)$$

e, ao mesmo tempo, há uma relação de supercompleteza,

$$\frac{2j+1}{4\pi} \int \frac{d^2 w}{(1 + |w|^2)^2} |w\rangle \langle w| = \mathbb{I}, \quad (4.7)$$

para a base por eles formados [64]. Finalmente, temos a relação de incerteza

$$\Delta J_x \Delta J_y = \frac{\hbar}{2} |\langle J_z \rangle|, \quad (4.8)$$

escrita para esta classe de estados coerentes.

4.2 Interação quântica para um sistema de dois spins

Uma vez apresentados os estados com os quais lidaremos neste capítulo, gostaríamos de dar ao leitor uma intuição acerca do tipo de interação com o qual trabalharemos. Esta seção apresenta um raciocínio simples para justificar o hamiltoniano que governará a evolução do nosso sistema. Em especial avaliamos a existência de uma dinâmica de acoplamento entre dois spin interagentes, comparando-a com aquela em que um spin relaciona-se com um campo magnético externo – caso apresentado logo a seguir:

Consideremos, de início, a dinâmica de uma partícula de spin j imersa em um campo magnético clássico $-\vec{B}(\vec{r}, t)$. O hamiltoniano que descreve este problema pode ser tomado por

$$H = \vec{B} \cdot \vec{J} = B_x J_x + B_y J_y + B_z J_z. \quad (4.9)$$

Retomando a representação de Heisenberg e conhecendo as relações de comutação dadas pela Eq. (4.3), é possível conceber

$$\dot{J}_x = \frac{[J_x, H]}{i\hbar} = B_y J_z - B_z J_y, \quad (4.10)$$

$$\dot{J}_y = \frac{[J_y, H]}{i\hbar} = -B_x J_z + B_z J_x, \quad (4.11)$$

$$\dot{J}_z = \frac{[J_z, H]}{i\hbar} = B_x J_y - B_y J_x, \quad (4.12)$$

ou, simplesmente,

$$\dot{\vec{J}} = \vec{B} \times \vec{J}. \quad (4.13)$$

Sendo assim, podemos tomar a expressão acima para os valores esperados no estado inicial em que o sistema foi preparado e obter

$$\langle \dot{\vec{J}} \rangle = \vec{B} \times \langle \vec{J} \rangle, \quad (4.14)$$

valores médios são tomados para o estado inicial do sistema. O spin é para a partícula aqui representada o equivalente ao momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$, que no eletromagnetismo clássico sofre um torque $-\vec{B} \times \vec{\mu}$ como consequência da interação com um campo magnético \vec{B} e tem, como estados estacionários, as configurações em que se alinha a uma direção paralela às linhas de campo.

Podemos olhar agora para o caso de dois spins que interagem sob o hamiltoniano $H = \lambda(\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2)$, sendo λ um parâmetro de acoplamento, e refazer os passos anteriores, isto

é, construir as equações de Heisenberg,

$$\dot{J}_{1x} = \frac{[J_{1x}, H]}{i\hbar} = \lambda(J_{2y}J_{1z} - J_{2z}J_{1y}), \quad (4.15)$$

$$\dot{J}_{2x} = \frac{[J_{2x}, H]}{i\hbar} = \lambda(J_{1y}J_{2z} - J_{1z}J_{2y}), \quad (4.16)$$

que, com aquelas para as demais componentes, são sintetizadas por

$$\dot{\vec{J}}_1 = \lambda(\vec{J}_2 \times \vec{J}_1) \quad e \quad \dot{\vec{J}}_2 = \lambda(\vec{J}_1 \times \vec{J}_2), \quad (4.17)$$

e, finalmente, tomar os valores esperados no estado inicial, chegando a

$$\langle \dot{\vec{J}}_1 \rangle = \lambda \langle \vec{J}_2 \times \vec{J}_1 \rangle \quad e \quad \langle \dot{\vec{J}}_2 \rangle = \lambda \langle \vec{J}_1 \times \vec{J}_2 \rangle. \quad (4.18)$$

Perceba, das equações acima, que este cenário é consistente com a interpretação que demos à Eq. (4.14). Agora, no entanto, ao invés de um \vec{B} externo, os spins \vec{J}_1 e \vec{J}_2 podem ser pensados como ímãs cujos campos magnéticos são aplicados um ao outro. Cada spin se relaciona com o outro de forma análoga ao que um único spin se relaciona com um campo magnético externo. Assim como um spin se acopla de certa maneira à presença de um campo externo, entendemos do caso acima que dois spins também tem a capacidade de acoplar suas dinâmicas. Em se tratando de dois espaços de Hilbert, é razoável pensar, portanto, que pode haver dinâmica de correlações entre eles. Para, em breve, medir o emaranhamento neste cenário, tomaremos um estado coerente bipartido inicialmente separável que evolui sob um hamiltoniano do tipo $H = \frac{\lambda}{\hbar} \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2$ e usaremos as medidas já apresentadas nos capítulos anteriores. Vamos agora esboçar o modelo realista que nos será útil para transcrever a dinâmica de spin em termos do formalismo liouvilliano.

4.3 Modelo clássico realista para o spin

Para estabelecer uma forma de transpôr a dinâmica de spin para o campo do realismo, comecemos olhando para as incertezas associadas aos operadores quânticos. Isto porque são elas que dão o caráter estatístico à descrição quântica de um observável e, portanto, sem elas, somos capazes de recuperar o determinismo na caracterização de uma quantidade física. Usando os estados coerentes apresentados na seção 4.1, encontra-se a variância

$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ para os operadores de spin,

$$(\Delta J_x)^2 = \hbar^2 j \left[\frac{1 + |w|^4 - |w|^2(w^2 + w^{*2})}{2(1 + |w|^2)^2} \right], \quad (4.19)$$

$$(\Delta J_y)^2 = \hbar^2 j \left[\frac{1 + |w|^4 + |w|^2(w^2 + w^{*2})}{2(1 + |w|^2)^2} \right], \quad (4.20)$$

$$(\Delta J_z)^2 = \hbar^2 j \left[\frac{2|w|^2}{(1 + |w|^2)^2} \right], \quad (4.21)$$

$$(\Delta \vec{J})^2 = \hbar^2 j. \quad (4.22)$$

Não é difícil perceber que uma maneira de anular todas as dispersões acima é tomar os limites em que $\hbar \rightarrow 0$ e $j \rightarrow \infty$, tal que $\hbar j \rightarrow 1$. Perceba que, com isso, conseguimos criar grandezas capazes de driblar o princípio de incerteza, que proíbe a determinação conjunta de dois observáveis com precisão absoluta. Desta forma, toda componente de spin, no regime acima prescrito, passa a ter dispersão nula, é conhecido com cem por cento de certeza e, portanto, em termos da argumentação de EPR [1], possui elemento de realidade. Em outras palavras, é clássico¹. Baseados nesta análise, vamos definir um mapa,

$$\mathcal{R}(F) = \lim_{\substack{\hbar \rightarrow 0 \\ j \rightarrow \infty}} \lim_{\hbar j \rightarrow 1} F(\hbar, j, w, w^*), \quad (4.23)$$

que adequa ao contexto realista qualquer função F – tipicamente, uma combinação dos operadores ligados à dinâmica de spin – com w fixo. Por exemplo, podemos construir o vetor de spin $\vec{\mathcal{J}}$ normalizado do modelo clássico como

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}} &= \mathcal{R}(\langle \vec{J} \rangle) = \lim_{\substack{\hbar \rightarrow 0 \\ j \rightarrow \infty}} \lim_{\hbar j \rightarrow 1} \langle w | \vec{J} | w \rangle \\ &= \left(\frac{w + w^*}{1 + |w|^2}, \frac{i(w - w^*)}{1 + |w|^2}, \frac{|w|^2 - 1}{1 + |w|^2} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.3.1 Parametrização

Desejamos agora construir uma parametrização de w que permita conceber uma projeção estereográfica de uma esfera de raio unitário – essencialmente uma esfera de Bloch – sobre um plano complexo gerado por $x = \Re(w)$ e $y = \Im(w)$, partes real e imaginária de w . O ajuste dessa projeção pode ser feito percebendo-se diretamente da definição trazida pela

¹É verdade que, do ponto de vista experimental, o valor de \hbar não é passível de manipulação, o que torna os limites acima apenas uma argumentação formal. No laboratório, na prática, teríamos j muito grande de forma que a quantidade $\frac{\Delta J}{\langle J \rangle} = \frac{\hbar \sqrt{j}}{\hbar j} = \frac{1}{\sqrt{j}}$ tendesse a zero.

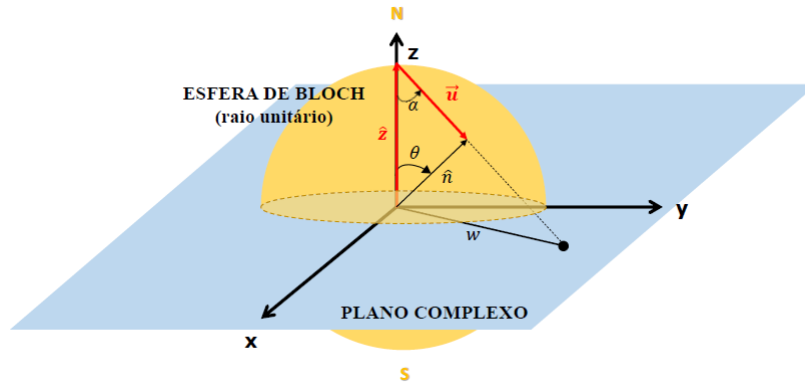


Figura 4.1: Projeção estereográfica da esfera de Bloch de raio unitário no plano complexo gerado por $x = \Re(w)$ e $y = \Im(w)$. Cada ponto sobre a esfera é localizado por $\hat{n}(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ e projetado no plano pelo prolongamento do vetor $\vec{u} = \hat{n}(\theta, \phi) - \hat{z}$, de tal forma que $w = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi}$.

Eq. (4.5) que, com $j = 1/2$, teremos

$$|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{(1 + |w|^2)}} [|- \rangle + w|+ \rangle], \quad (4.25)$$

com $|\pm\rangle$ os autovetores usuais de spin $1/2$ na direção z com autovalores $\pm\hbar/2$. Para $w \rightarrow 0$, isto é, tomando-se w muito pequeno, recai-se sobre um estado coerente $|- \rangle$; em outras palavras, a origem do plano complexo ($x = y = 0$) deve receber a projeção do pólo sul da esfera (codificado em $|- \rangle$). Repete-se o mesmo raciocínio para w grande e percebe-se que $w \rightarrow \infty$ implica no estado coerente $|+ \rangle$; agora temos o infinito do plano complexo recebendo a projeção do pólo norte da esfera de Bloch. Dessa maneira, cada ponto sobre a esfera, isto é, cada estado de spin, é mapeado em um ponto sobre o plano complexo. Um esquema da representação que estamos propondo pode ser encontrado na Figura 4.1, sobre a qual debruçaremos a seguir.

É particularmente útil tomarmos $|w| = \tan \alpha$, com α definido como mostra a Figura 4.1. Em termos geométricos, temos que $\hat{z} + \vec{u} = \hat{n}$, com \hat{z} sendo o vetor unitário (dado que o raio da esfera é igual a 1) que liga a origem do plano complexo ao pólo norte da esfera, \vec{u} o vetor que, partindo do pólo norte aponta qualquer ponto na superfície da esfera e \hat{n} o versor usual em coordenadas esféricas dado por $\hat{n}(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ para $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$. Prolongando o vetor \vec{u} até que ele cruze o plano xy , vemos facilmente que $|w| = \tan \alpha$, como propusemos e, ainda, é possível utilizar a relação $\tan \alpha = \cot(\theta/2)$ para finalmente escrever

$$w = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi}. \quad (4.26)$$

Note que, substituindo a parametrização acima no vetor de spin clássico definido pela

Eq. (4.24), obtemos

$$\vec{\mathcal{J}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (4.27)$$

corroborando com o que foi apresentado na seção de introdução aos estados coerentes de spin, com a particular vantagem de que esta parametrização leva em conta o vínculo $|\vec{\mathcal{J}}| = 1$, reduzindo o problema ao par de variáveis (θ, ϕ) .

4.3.2 Equações de movimento

No intuito de buscar construir um formalismo hamiltoniano para nosso modelo clássico de spin, ou seja, encontrar um par de variáveis canonicamente conjugadas que obedecem a equações de movimento usuais e com as quais possamos construir uma dinâmica análoga a imposta pelo formalismo de Heisenberg aos operadores de spin, vamos propôr a troca das variáveis (θ, ϕ) para o par ângulo-ação, já familiar na literatura, (ϕ, I) [65], tais que

$$\vec{\mathcal{J}} = (\sqrt{1 - I^2} \cos \phi, \sqrt{1 - I^2} \sin \phi, I), \quad (4.28)$$

o que evidencia a transformação tomada: $I = \cos \theta$ e $\tan \phi = \frac{\mathcal{J}_y}{\mathcal{J}_x}$.

Podemos construir a hamiltoniana clássica deste problema fazendo $\mathcal{R}(\langle w | \frac{H}{\lambda} | w \rangle)$. Na dinâmica de um único spin regida por H tal qual escrito na Eq. (4.9), obtemos, por exemplo,

$$H^{(cl)} = \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{J}} = \sqrt{1 - I^2} (B_x \cos \phi + B_y \sin \phi) + I B_z. \quad (4.29)$$

Tendo associado a variável I com a componente z de $\vec{\mathcal{J}}$, é possível evidenciar a equação de movimento para ela, inspirados pela Eq. (4.13), escrevendo

$$\begin{aligned} \dot{I} &= (\vec{B} \times \vec{\mathcal{J}})_z \\ &= \sqrt{1 - I^2} (B_x \sin \phi - B_y \cos \phi). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Perceba que o lado direito da igualdade acima pode ser obtido alternativamente pela derivada parcial de $H^{(cl)}$ – Eq. (4.29) – em relação à variável ϕ , o que nos leva a

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\partial_\phi \left[\sqrt{1 - I^2} (B_x \cos \phi + B_y \sin \phi) + I B_z \right] \\ &= -\frac{\partial H^{(cl)}}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

que tem clara semelhança com a estrutura das equações de Hamilton canônicas. Conse-

guimos, assim, a primeira das equações de movimento para o modelo clássico de spin.

Para encontrar a segunda, recuperemos a parametrização $\tan \phi = \mathcal{J}_y/\mathcal{J}_x$ e avaliemos a derivada temporal desta expressão:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} \sec^2 \phi &= \frac{(\mathcal{J}_x \dot{\mathcal{J}}_y - \dot{\mathcal{J}}_x \mathcal{J}_y)}{\mathcal{J}_x^2} = \\ &= \frac{B_z(\mathcal{J}_x^2 + \mathcal{J}_y^2) - \mathcal{J}_z(\mathcal{J}_x B_x + \mathcal{J}_y B_y)}{\mathcal{J}_x^2}.\end{aligned}\quad (4.32)$$

Olhando com cuidado, percebemos que, da construção do vetor de spin clássico (4.27), podemos extrair que

$$\frac{1}{\mathcal{J}_x^2} = \frac{1}{1 - I^2} \frac{1}{\cos^2 \phi} = \frac{1}{1 - I^2} \sec^2 \phi. \quad (4.33)$$

Substituindo este resultado e explicitando as demais componentes de $\vec{\mathcal{J}}$ na Eq. (4.32), podemos multiplicá-la inteiramente por $\frac{1}{\sec^2 \phi}$ e, assim, obter

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{B_z(1 - I^2)(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}{1 - I^2} - \frac{I\sqrt{1 - I^2}(\cos \phi B_x + \sin \phi B_y)}{1 - I^2} \\ &= B_z - \frac{I(B_x \cos \phi + B_y \sin \phi)}{\sqrt{1 - I^2}}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Perceba, novamente, que o lado direito da equação acima é encontrado também pela derivada parcial de $H^{(cl)}$ em relação à variável I , o que nos permite escrever, finalmente,

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H^{(cl)}}{\partial I}, \quad (4.35)$$

a segunda equação de Hamilton que procurávamos!

Este cálculo mostra que o mapa que definimos leva a um modelo clássico que é consistente com a formulação hamiltoniana da mecânica para o par de variáveis (ϕ, I) . Além do mais, este resultado, obtido aqui por meios diferentes, é possível mostrar, concorda com outras estruturas semiclássicas obtidas, por exemplo, com a construção de propagadores via estados coerentes de spin [66].

4.4 Estado bipartido de spin 1/2

A fim de verificar que este modelo clássico é capaz de reproduzir o emaranhamento quântico, vamos tomar o caso mais simples deste cenário: duas partículas de spin 1/2 que interagem entre si sob um hamiltoniano $H = \frac{\lambda}{\hbar} J_{az} J_{bz}$, com J_{kz} sendo o operador de spin na direção z associado ao subespaço indexado por k . Este não é, evidentemente, o desafio

mais complexo a que podemos submeter nosso modelo. No entanto, este não é o objetivo aqui. Nos é suficiente, justamente, que uma – qualquer uma – teoria comprovadamente não-local tenha a sua dinâmica de correlações reproduzida por um modelo clássico.

Estado inicial:

Podemos iniciar com um estado coerente de spin $1/2$ bipartido separável, por simplicidade. Para o caso quântico, portanto, tomando $|w_{k0}\rangle \in \mathcal{H}_k$, temos

$$\rho_0 = |w_{a0}w_{b0}\rangle\langle w_{a0}w_{b0}|, \quad (4.36)$$

que pode ser usado para a obtenção da distribuição de probabilidades clássica inicial, via, por exemplo, a função Husimi, que para este caso é bem simples de calcular. Ficamos, assim, com

$$P_0(I_a, \phi_a, I_b, \phi_b) = \frac{1}{16\pi^2} \left(1 + I_a I_{a0} + \cos(\phi_a - \phi_{a0}) \sqrt{(1 - I_a^2)(1 - I_{a0}^2)} \right) \times \\ \left(1 + I_b I_{b0} + \cos(\phi_b - \phi_{b0}) \sqrt{(1 - I_b^2)(1 - I_{b0}^2)} \right), \quad (4.37)$$

já escrita em termos das variáveis de ângulo e ação $\{\phi_1, \phi_2, I_1, I_2\}$. Aqui vale mencionar que o perfil da distribuição inicial constitui um grau de liberdade adicional ao formalismo clássico estatístico com o qual desejamos reproduzir a dinâmica de emaranhamento. Em um contexto mais geral, acreditamos ser possível estabelecer que a função, dentre as candidatas naturais ao papel de distribuição de probabilidades², que torna mais eficiente esta reprodução bem como a tentativa de reprodução da não localidade é justamente a de Husimi. Neste trabalho, no entanto, nos será suficiente apresentar um caso em que a não-separabilidade clássica reproduz fielmente o emaranhamento e, por essa razão, não avançaremos em tal investigação.

Evolução temporal:

No caso quântico, o operador densidade evolui no tempo pela fórmula

$$\rho(t) = \exp \left[-\frac{i\lambda t J_{az} J_{bz}}{\hbar^2} \right] |w_{a0}w_{b0}\rangle\langle w_{a0}w_{b0}| \exp \left[\frac{i\lambda t J_{az} J_{bz}}{\hbar^2} \right], \quad (4.38)$$

com $J_i = \frac{\hbar\sigma_i}{2}$, que gera uma matriz hermitiana 4×4 . Para o modelo clássico, temos a

²Neste capítulo não usaremos mais a função de Wigner, pois, para sistemas de spins, ela pode assumir valores negativos, o que a desqualifica como distribuição de probabilidades genuína.

hamiltoniana $H = \lambda I_a I_b$ e, portanto, as seguintes equações de movimento:

$$\dot{I}_a = 0, \quad \dot{\phi}_a = \lambda I_b, \quad (4.39)$$

$$\dot{I}_b = 0, \quad \dot{\phi}_b = \lambda I_a, \quad (4.40)$$

ou ainda,

$$\phi_a(t) = \phi_{a0} + \lambda t I_{b0}, \quad (4.41)$$

$$\phi_b(t) = \phi_{b0} + \lambda t I_{a0}. \quad (4.42)$$

Finalmente, estamos aptos a construir a distribuição de probabilidades clássica evoluída no tempo, tomando

$$P(t) \equiv P_0(I_a, \phi_a(-t), I_b, \phi_b(-t)). \quad (4.43)$$

Emaranhamento:

De posse do operador $\rho(t)$, podemos calcular de maneira simples o emaranhamento quântico entre os subsistemas através da medida definida na Eq. (3.29), em função do tempo adimensional $\tau = \lambda t$ e obter

$$\mathcal{C}^{(q)}(\tau) = \frac{8|w_{a0}|^2|w_{b0}|^2}{(1 + |w_{a0}|^2)^2(1 + |w_{b0}|^2)^2} \sin^2(2\tau), \quad (4.44)$$

que dá origem aos gráficos mostrados na Figura 4.2, onde constata-se novamente o caráter oscilatório no tempo desta quantidade e também pode-se avaliar a função do parâmetro complexo w como potencializador da correlação.

Retomando a Eq. (3.30), podemos construir a medida de correlação clássica para o modelo de spin que estamos analisando. Encontramos, assim, a expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(cl)}(\tau) = & \frac{(I_{10}^2 - 1)}{8\tau^4} \{ I_{20}^2 + \tau^2 + I_{20}^2 \tau^2 - 2\tau^4 + \\ & + [-\tau^2 + I_{20}^2(\tau^2 - 1)] \cos(2\tau) - 2I_{20}^2 \tau \sin(2\tau) \} \end{aligned} \quad (4.45)$$

quando a distribuição de probabilidades clássica é construída via função de Husimi. Este resultado é apresentado no gráfico da Figura 4.3, em comparação com o emaranhamento. Perceba a semelhança entre as quantidades para tempos curtos.

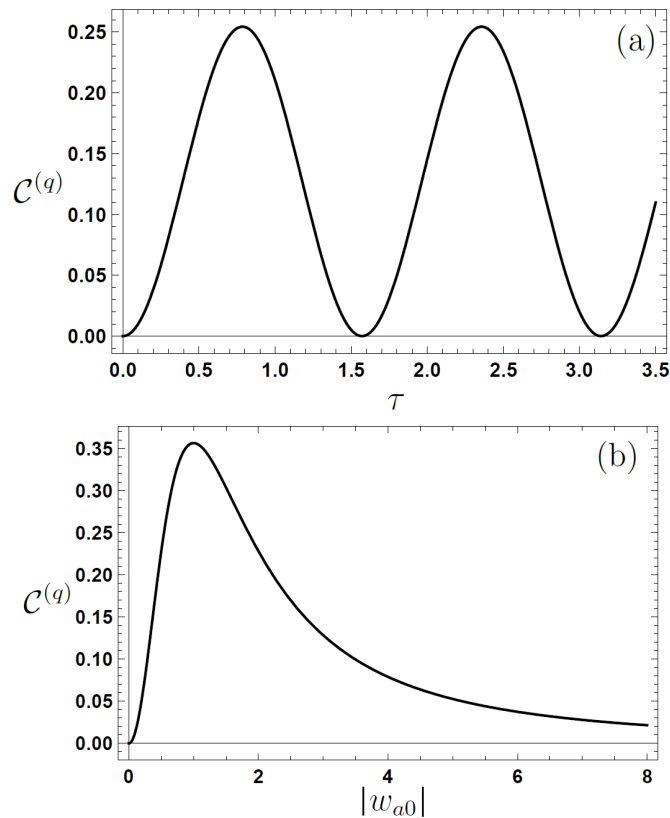


Figura 4.2: Emaranhamento quântico para um estado coerente de spin bipartido inicialmente separável em função (a) do tempo adimensional τ e (b) do módulo do parâmetro complexo w_{a0} (uma figura equivalente é obtida para o parâmetro w_{b0}). Em (a) tomamos $w_{a0} = w_{b0} = 1$ e, em (b), $\tau = \frac{\pi}{4}$, instante em que a curva do emaranhamento no tempo passa por um máximo.

A fim de chamar ainda mais a atenção para a concordância entre as medidas clássica e quântica, podemos desenhar o gráfico paramétrico dessas quantidades no tempo. Essa curva é mostrada na Figura 4.4; até $\tau = \frac{\pi}{4}$ ela é monotonamente crescente, indicando que as duas medidas de correlação têm dinâmica qualitativamente equivalente. Para tempos maiores, surgem divergências que vão se intensificando.

Mais uma vez, temos um exemplo de construção em que uma teoria clássica parece ser capaz de, em certos regimes, reproduzir o emaranhamento quântico, o que se choca com a lição principal deixada pelo teorema de Bell. Analisemos mais uma vez o que aprendemos sobre ele: a Mecânica Quântica – acusada de ser incompleta por não caber dentro das premissas de realismo local tal qual definida por EPR – é essencialmente diferente de qualquer teoria clássica justamente por violar o critério de localidade. É possível investigar e comprovar isso em laboratório através das desigualdades de Bell. A teoria quântica deve violá-las, apresentando esse comportamento físico que chamamos de *não localidade de Bell* e um modelo clássico não. É isso que queremos investigar finalmente, antes de tentar dar uma palavra sobre o aparente desconforto que estamos mostrando aqui.

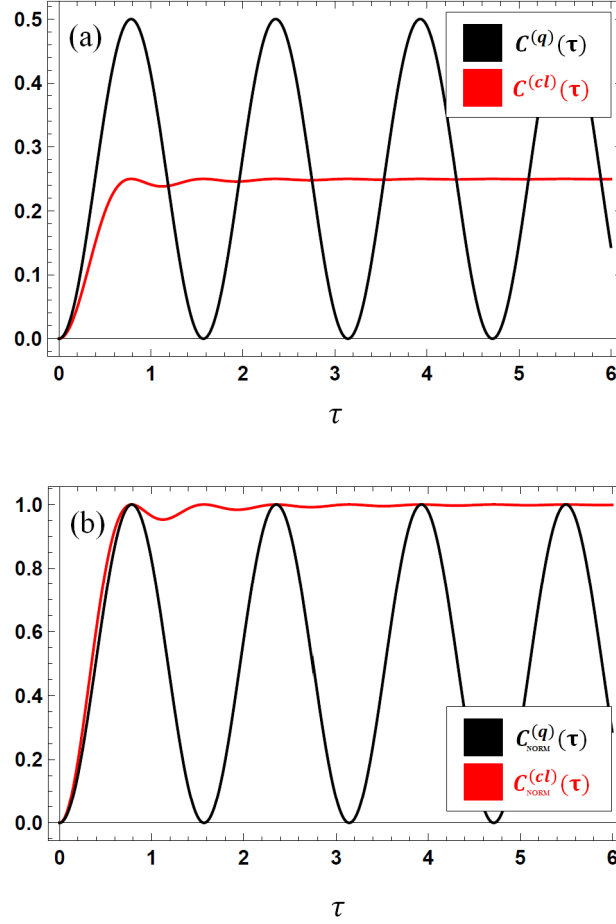


Figura 4.3: Correlações quântica $\mathcal{C}^{(q)}$ e clássica $\mathcal{C}^{(cl)}$ para um sistema de dois spins $1/2$ inicialmente separável, em função do tempo adimensional τ . Em (a) apresentamos os valores absolutos dessas quantidades e, em (b), comparamos as mesmas grandezas agora normalizadas.

Não localidade de Bell:

Para medir não localidade³ nos sistemas de que dispomos, recorreremos à desigualdade CHSH usual,

$$S = |\langle A \otimes B \rangle + \langle A \otimes B' \rangle + \langle A' \otimes B \rangle - \langle A' \otimes B' \rangle| \leq 2, \quad (4.46)$$

cumprindo o seguinte protocolo (Figura 4.5): o laboratório portador da primeira partícula poderá fazer uma de duas medidas de spin, J_z ou J_i , com i denotando uma direção arbitrária (θ_i, ϕ_i) ; o outro optará entre duas outras direções de medida J_u e J_v , descritas pelos ângulos (θ_u, ϕ_u) e (θ_v, ϕ_v) . Portanto, os quatro observáveis sobre os quais avaliaremos

³Neste trabalho nos é suficiente apenas revelar a existência de não localidade através da violação de uma desigualdade de Bell. Para detalhes sobre quantificação de não localidade, sugerimos a referência [67].

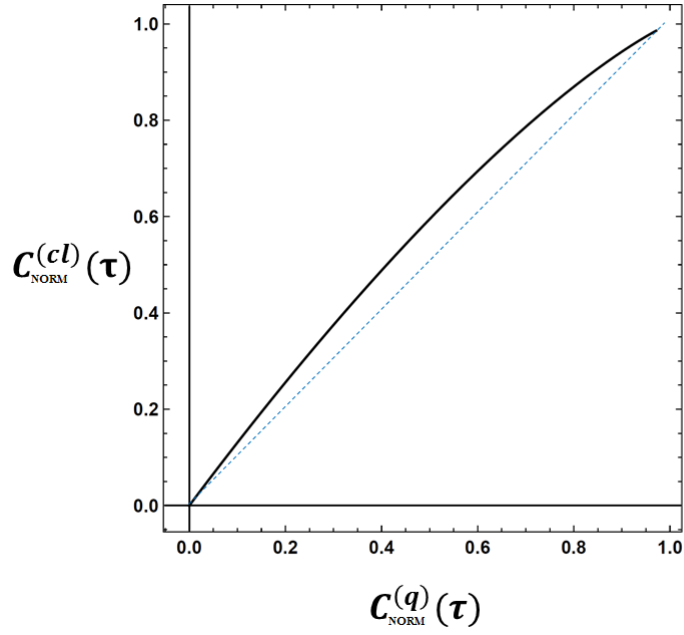


Figura 4.4: Curva paramétrica entre as correlações quântica $\mathcal{C}^{(q)}$ e clássica $\mathcal{C}^{(cl)}$, ambas normalizadas, para o caso do sistema de spin 1/2 inicialmente separável, desenhada para $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{4}$.

a desigualdade CHSH agora são

$$\begin{aligned}
 A_1 &= J_z = \hat{z} \cdot \vec{J}, \\
 A_2 &= J_i(\theta_i, \phi_i) = (\cos \phi_i \sin \theta_i, \sin \phi_i \sin \theta_i, \cos \theta_i) \cdot \vec{J}, \\
 B_1 &= J_u(\theta_u, \phi_u) = (\cos \phi_u \sin \theta_u, \sin \phi_u \sin \theta_u, \cos \theta_u) \cdot \vec{J}, \\
 B_2 &= J_v(\theta_v, \phi_v) = (\cos \phi_v \sin \theta_v, \sin \phi_v \sin \theta_v, \cos \theta_v) \cdot \vec{J}.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Operacionalmente todas as medidas aqui descritas são simplesmente obtidas por uma rotação de um aparato, por exemplo, do tipo Stern-Gerlach.

Em um grande número de rodadas deste experimento, podemos computar a quantidade estatística

$$S = |\langle J_z J_u \rangle + \langle J_z J_v \rangle + \langle J_i J_u \rangle - \langle J_i J_v \rangle|, \tag{4.48}$$

onde o valor esperado $\langle AB \rangle$ é tomado por uma medida do observável A no subespaço indexado por a e B no subespaço b , e avaliar se ela é maior que 2 em algum instante de tempo. Se o for, temos um sistema que apresenta não localidade de Bell; caso contrário,



Figura 4.5: Cenário para avaliação da desigualdade CHSH para um sistema de spin $1/2$. Cada laboratório pode efetuar uma entre duas possíveis medidas: J_z ou J_i para o laboratório A e J_u ou J_v para o laboratório B, onde i, u e v denotam direções arbitrárias de orientação do aparato de medida.

temos um sistema local. Começemos pelo cenário quântico.

Calcular quanticamente os valores esperados que aparecem na CHSH é simples e nos deixa com uma expressão que depende, além dos rótulos w_{a0} e w_{b0} , que serão fixados, e do tempo adimensional τ , de três pares de ângulos, três direções $\{i, u, v\}$. Vamos numericamente, procurar o máximo valor dessa expressão em relação às três direções genéricas para cada instante de tempo e apresentar essa informação em um gráfico. É o que temos na Figura 4.6. O máximo valor possível de (4.48), quando varridas numericamente as três direções arbitrárias do problema, é sempre maior ou igual a 2, com a igualdade acontecendo justamente nos tempos em que o emaranhamento se anula (vide Figura 4.2 (a)). Portanto, estamos diante de um sistema que apresenta não localidade, como era de se esperar. É interessante notar também que a violação aqui observada é sempre menor que a máxima violação prevista para a Mecânica Quântica: a violação de Tsirelson, $2\sqrt{2}$ [46].

Como última palavra sobre o contexto quântico, é intuitivo perceber que o emaranhamento e a não localidade de Bell, aqui, de fato concordam, corroborando o que se esperava ao conhecer o teorema de Gisin. Uma ilustração dessa concordância vem apresentada na Figura 4.7. Ali foi construída uma curva paramétrica entre a medida de emaranhamento (4.44) e uma medida da presença de não localidade, $S_{\max} - 2$, isto é, quão maior que 2 é a maximização de S . Ambas as funções foram normalizadas pelo valor máximo que assumem e o gráfico mostra uma indiscutível concordância qualitativa – dado o fato de surgir uma curva monotonamente crescente no tempo – e está bem próximo de uma concordância quantitativa entre as medidas. Vale ressaltar, mais uma vez, que para os efeitos pretendidos neste trabalho não é fundamentalmente necessário avaliar a eficiência de violação de uma desigualdade de Bell como quantificador de não localidade; a concordância

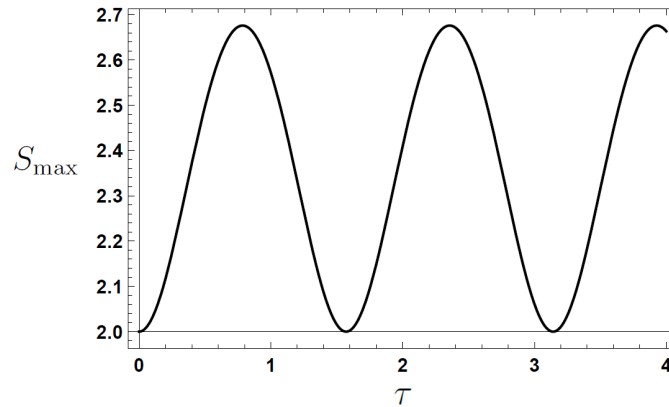


Figura 4.6: Evolução no tempo da maximização, S_{\max} , da expressão que origina a desigualdade CHSH em relação a três direções arbitrárias para um sistema quântico de spin $1/2$. A violação acontece sempre que esta quantidade alcança valores maiores que 2, revelando, assim, a não localidade do sistema a ela submetido.

qualitativa é perfeitamente suficiente para dizer que a presença de emaranhamento implica em presença de não localidade.

O que ocorre, no entanto, quando submetemos o modelo clássico ao mesmo protocolo? Para o cálculo clássico da quantidade S , retomamos o vetor clássico de spin, definindo as direções arbitrárias como $\{(\hat{n}_i \cdot \vec{\mathcal{J}}), (\hat{n}_u \cdot \vec{\mathcal{J}}), (\hat{n}_v \cdot \vec{\mathcal{J}})\}$ e lembrando-nos de obter o valor esperado de uma quantidade $f(\vec{I}, \vec{\phi})$ por

$$\langle f(\vec{I}, \vec{\phi}) \rangle = \int P(t) f(\vec{I}, \vec{\phi}) dI_a dI_b d\phi_a d\phi_b. \quad (4.49)$$

Novamente temos uma expressão que depende de três pares de ângulos e vamos maximizar a quantidade (4.48) para cada instante de tempo nessas variáveis. O resultado deste processo numérico é apresentado na Figura 4.8. Diferentemente do que vimos no cenário quântico, os máximos valores alcançados por S , agora, estão longe de violar a CHSH, em outras palavras, não há qualquer sombra de não localidade de Bell neste modelo clássico que construímos!

Este resultado aponta para uma conclusão importante: ainda que sejam capazes de reproduzir o emaranhamento quântico, os sistemas aqui apresentados, baseados em variáveis ocultas locais, continuam sendo fundamentalmente diferentes daqueles previstos pela teoria quântica, pois continuam não manifestando não localidade, conceito físico que difere em essência esta da Mecânica Clássica. Em outras palavras, ousaria dizer que há aqui uma corroboração do teorema de Bell, no sentido de que, ainda que uma teoria realista e local seja boa o bastante para reproduzir o emaranhamento, não é possível reproduzir com ela a não localidade, resguardando, mais uma vez, essa como uma fronteira entre os mundos clássico e quântico.

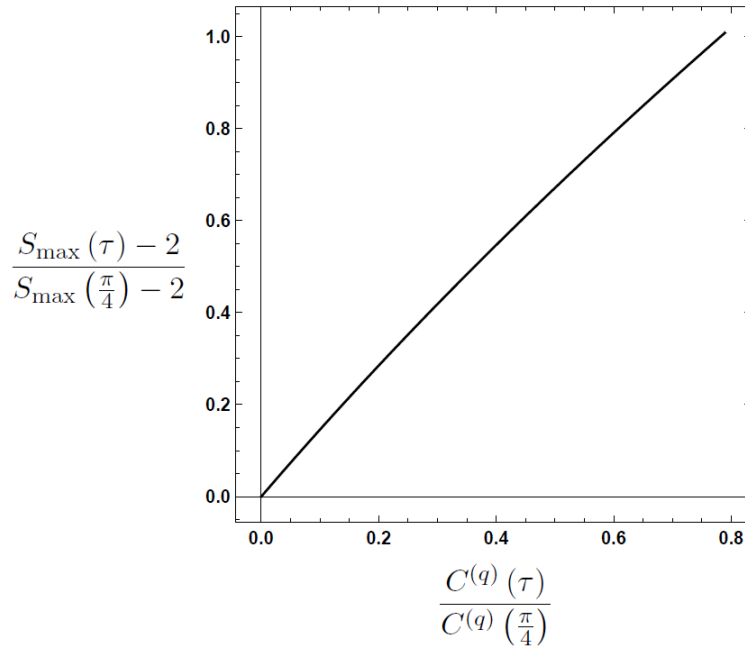


Figura 4.7: Curva paramétrica no tempo entre as medidas de emaranhamento e não localidade de Bell para um sistema de dois spins 1/2 interagentes. O gráfico, por ser monotonamente crescente, comprova a ideia trazida pelo teorema de Gisin de que a presença de emaranhamento, para estados puros, implica presença de não localidade.

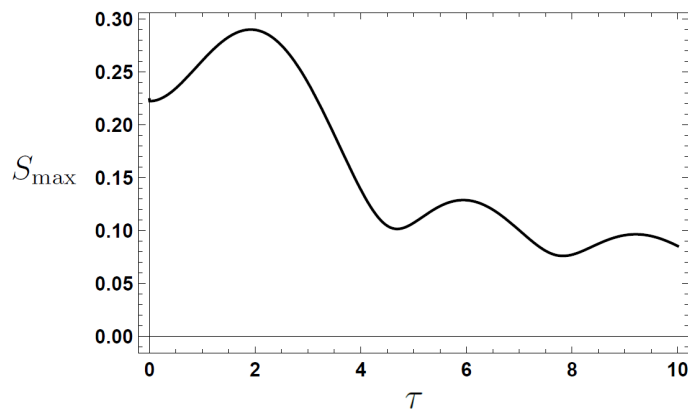


Figura 4.8: Evolução no tempo da maximização, S_{\max} , da expressão que origina a desigualdade CHSH em relação a três direções arbitrárias para um modelo clássico de spin. Não há qualquer violação neste caso, indicando a ausência de não localidade de Bell.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Como a maior parte dos trabalhos (se não todos) que versam sobre emaranhamento e as demais testemunhas de correlações quânticas, começamos revisitando a década de 1930, quando a completeza da Mecânica Quântica foi questionada, sobretudo, por Einstein, Podolsky e Rosen, que demonstraram com argumentos lógicos que, ainda que a teoria fosse correta, havia um problema de compatibilidade entre suas previsões e a premissa básica de realismo local, fundamental para o pensamento físico da época. A argumentação de EPR versou sobre o fenômeno posteriormente conhecido como emaranhamento. Surge uma corrente de pensamento de que deve ser possível completar a Mecânica Quântica, a fim de torná-la compatível com essa ideia, com um conjunto de variáveis não necessariamente acessíveis ao experimentador: as variáveis ocultas. O teorema de Bell, concebido quase trinta anos depois de estabelecido o paradoxo EPR, determina o caminho experimental para comprovar que há uma diferença fenomenológica essencial entre o mundo físico clássico e a teoria quântica: a não localidade. Sistemas quânticos podem ser não locais e isso pode ser aferido através da violação de uma de várias desigualdades estatísticas – as desigualdades de Bell, cujo principal exemplo é a CHSH. Por conta dessa diferença fundamental, não deve haver meio de compatibilizar, por exemplo, uma teoria de variáveis ocultas locais (TVOL) com a Mecânica Quântica. Lembramos também do teorema de Gisin (e sua generalização) que garante, no contexto de variáveis discretas, que todo estado puro não separável – emaranhado – viola uma desigualdade de Bell, o que implica em dizer que este apresenta não localidade.

Motivamo-nos assim a estudar o caso já conhecido na literatura de sistemas clássicos que conseguem reproduzir o emaranhamento quântico, o que, no contexto de estados puros, poderia ser um indicador de não localidade. Em especial na referência [20], usa-se um formalismo clássico estatístico (a Mecânica Liouvillianiana) de variáveis ocultas (as trajetórias clássicas Hamiltonianas) para apontar os regimes de existência de uma não separabilidade cuja dinâmica é sensivelmente análoga a do emaranhamento pelo menos a tempos curtos. A ponte entre os contextos clássico e quântico é feita tomando-se a projeção de ρ_0 na base de estados coerentes como a distribuição de probabilidades inicial,

procedimentos implementados com o auxílio das funções de Wigner e Husimi. Fizemos uma releitura deste trabalho, inserindo ali novas medidas de correlação para o formalismo clássico estatístico, dando ao leitor os elementos necessários para perceber que a concordância entre as medidas clássica e quântica de correlação chega a ser exata para o caso de um sistema bipartido com acoplamento bilinear do tipo $H = \lambda q_1 q_2$. Assim como já sabia-se que ocorre com sistemas quânticos, dois estados clássicos descritos por distribuições de probabilidades inicialmente separáveis que interagem entre si, segundo este modelo, podem tornar-se inseparáveis no tempo; no sistema ali estudado, a geração de inseparabilidade clássica acompanha exatamente a de emaranhamento quântico. A primeira pergunta que se pode fazer, ao ler o que foi apresentado no capítulo 3, é: estamos diante de uma violação do teorema de Bell ao reproduzir emaranhamento a partir de uma teoria clássica? Se esta for uma teoria local, de fato, temos um desconforto a solucionar. Há de se lembrar que existe na literatura pelo menos um bom modelo de variáveis ocultas alternativo à Mecânica Quântica: a Mecânica Bohmiana. O que ocorre ali, no entanto, é que se trata de uma teoria fundamentalmente não local e, portanto, a eventual reprodução de resultados quânticos por ela não se choca contra o teorema de Bell. O modelo tratado em [20], no entanto, advindo essencialmente de conceitos clássicos, não traz elementos que façam crer *a priori* que se trata de uma teoria não local. Uma solução imediata para saber se estamos diante de um modelo local ou não seria obtida submetendo-o a um teste de Bell. A fim de recorrer, portanto, ao mais aclamado deles – a desigualdade CHSH – mudamos o cenário, tentando estabelecer protocolo semelhante no contexto de variáveis discretas, onde é derivada originalmente a CHSH. Outra questão é que o teorema de Gisin, bem como sua generalização, trata especificamente de variáveis discretas. Logo, é imperativo notar que não podemos estabelecer uma relação de equivalência entre emaranhamento e não localidade no contexto de variáveis contínuas, pois não há até o momento, no conhecimento do autor, um resultado rigoroso que estenda o teorema de Gisin para este domínio.

Tomamos, no capítulo 4, a dinâmica quântica de spin e, antes de tudo, nos debruçamos sobre a construção de uma contrapartida clássica que desempenharia o papel de teoria de variáveis ocultas locais (TVOL). Utilizando os estados coerentes desta álgebra, estabelecemos de maneira similar ao caso bosônico, a construção do estado clássico estatístico inicial a partir de ρ_0 . Usando uma projeção estereográfica da esfera de Bloch sobre o plano complexo definido pelos rótulos dos estados coerentes, fomos capazes de intuir sobre as variáveis canonicamente conjugadas que nos permitiriam a construção de nossa TVOL e validamos, com elas, as equações de movimento hamiltonianas que nosso modelo obedeceria. Finalmente, estudamos a dinâmica de correlação – emaranhamento quântico e não separabilidade clássica – e não localidade de Bell para um sistema de dois spins $1/2$. Para o primeiro, foi notório que para tempos curtos, temos uma TVOL que descreve a geração de emaranhamento. Para o segundo estudo, feito através da investigação da violação da

desigualdade CHSH, ainda que no caso quântico haja uma fácil e clara violação, nosso modelo clássico não chega sequer perto de atingir o máximo valor que a CHSH prevê para teorias locais. Poderíamos resumir a constatação ali obtida, dizendo que a TVO ali utilizada mostra-se uma teoria local em dois substanciais aspectos: é local por construção, pois suas trajetórias não acoplam variáveis de diferentes subespaços e também por não violar um teste de Bell, ferramenta reveladora da presença de não localidade. Este resultado aponta para uma possível solução do problema que motivou esta dissertação: vemos que é plenamente possível que uma teoria local faça uma boa mímica do emaranhamento sem, contudo, violar a CHSH. Assim, no contexto de variáveis discretas, o paradoxo se dissipa, não havendo qualquer confronto com o teorema de Bell. Somos levados a concluir que, usando a ideia inicialmente controversa de um modelo realista e local ser capaz de reproduzir fenômenos especificamente quânticos, tal qual o emaranhamento, a não localidade segue como conceito a diferenciar fundamentalmente estes mundos. Apenas um modelo genuinamente não local é capaz de violar uma desigualdade de Bell e mostrar-se, em certo sentido, ainda além do melhor que conseguimos com uma teoria de variáveis ocultas locais. Uma solução como esta pode existir também no caso de variáveis contínuas, mas o seu teste definitivo demanda a construção de uma desigualdade de Bell adequada, algo que ainda não está disponível. Num futuro próximo, pensamos ser possível aplicar um teste de Bell confiável com variáveis contínuas através da violação da desigualdade CHSH usando operadores do tipo sinal, $\frac{A}{|A|}$.

Ainda no capítulo 4, mostramos que a não localidade tem dinâmica idêntica a do emaranhamento, corroborando mais uma vez com a previsão do teorema de Gisin.

Em termos de perspectivas futuras, é também desejável avaliar o que acontece com hamiltonianas clássicas mais gerais, em especial aquelas não locais por construção. Se, por exemplo, as equações de Hamilton são da forma $\dot{p}_1 = f(q_2)$, então há uma força sobre a partícula 1 dependendo da posição instantânea da partícula 2, isto é, se a partícula 2 se move, a 1 sente imediatamente a alteração, não importa o quão distante elas estejam uma da outra. A princípio, essa TVO pode violar a desigualdade CHSH sem qualquer prejuízo ao teorema de Bell, pois as trajetórias são reconhecidamente não locais, algo semelhante ao que ocorre na Mecânica Bohmiana.

Feitas as considerações anteriores, chamamos a atenção para o que nos parece ser o principal problema a ser investigado como consequência deste trabalho. Se aceitamos que a presença de emaranhamento sugere a presença de não localidade, como é possível que um modelo genuinamente local como o aqui proposto seja capaz de reproduzir, ainda que para tempos curtos, a dinâmica do emaranhamento? Mesmo tendo apresentado aqui dois fortes e suficientes argumentos para indicar que nossa teoria de variáveis ocultas é local em essência, mostrou-se no capítulo 4 que é possível com ela reproduzir um indicador qualitativo de não localidade – o emaranhamento – para tempos curtos. Esse aparente paradoxo, acreditamos, deve ser estudado mais a fundo. Ainda que seja necessário de-

bruchar-se de maneira mais sistemática sobre este problema antes de apresentar qualquer opinião, acreditamos que o fato de associar a uma teoria clássica, *a priori* baseada na trajetória de pontos no espaço de fase, uma distribuição de probabilidades, acaba de alguma forma permitindo o aparecimento dos ingredientes necessários para que esta estatística imite o que acontece no cenário quântico, reproduzindo, por exemplo, o fenômeno do emaranhamento.

Os resultados dessa dissertação deram origem ao trabalho que pode ser encontrado no endereço <https://arxiv.org/abs/1704.02000>.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [2] E. Schroedinger. Discussion of probability relations between separated systems. *P. Camb. Philos. Soc.* **31**, 555 (1935).
- [3] D. Bohm e Y. Aharonov. Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Phys. Rev.* **108**, 1070 (1957).
- [4] D. Bohm. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden” Variables. *Phys. Rev.* **85**, 180 (1952).
- [5] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics* **1**, 195 (1964).
- [6] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
- [7] A. Aspect, P. Grangier e G. Roger. Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell’s Theorem. *Phys. Rev. Lett.* **47**, 7 (1981).
- [8] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger. Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers. *Phys. Rev. Lett.* **49**, 25 (1982).
- [9] W. Tittel, J. Brendel, B. Gisin, T. Herzog, H. Zbinden e N. Gisin. Experimental demonstration of quantum-correlations over more than 10 kilometers. *Phys. Rev. A* **57**, 3229 (1998).
- [10] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter e A. Zeilinger. Violation of Bell’s inequality under strict Einstein locality conditions. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5039 (1998).
- [11] Jian-Wei Pan, D. Bouwmeester, M. Daniell, H. Weinfurter e A. Zeilinger. Experimental test of quantum nonlocality in three-photon GHZ entanglement. *Nature* **403**, 6769 (2000).
- [12] S. Gröblacher, T. Paterek, Rainer Kaltenbaeck, S. Brukner, M. Zukowski, M. Aspelmeyer e A. Zeilinger. An experimental test of non-local realism. *Nature* **446**, 871 (2006).

-
- [13] B. Hensen et al. Loophole-free Bell Inequality Violation Using Electron Spins Separated by 1.3 Kilometres. *Nature* **526**, 682 (2015).
 - [14] M. Giustina et al. Significant-Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons. *Phys. Rev. Lett.* **115**, 250401 (2015).
 - [15] L. K. Shalm et al. Strong Loophole-Free Test of Local Realism. *Phys. Rev. Lett.* **115**, 250402 (2015).
 - [16] A. L. O. Bilobran e R. M. Angelo. A measure of physical reality. *Europhys. Lett.* **112**, 40005 (2015).
 - [17] E. A. Fonseca e F. Parisio. Measure of nonlocality which is maximal for maximally entangled qutrits. *Phys. Rev. A* **92**, 030101(R) (2015).
 - [18] N. Gisin. Bell's inequality holds for all non-product states. *Phys. Lett. A* **154**, 201 (1991).
 - [19] Sixia Yu, Qing Chen, Chengjie Zhang, C. H. Lai, e C. H. Oh. All Entangled Pure States Violate a Single Bell's Inequality. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 120402 (2012).
 - [20] R. M. Angelo, S. A. Vitiello, M. A. M. de Aguiar e K. Furuya. Quantum linear mutual information and classical correlations in globally pure bipartite systems. *Physica A* **338**, 458 (2004).
 - [21] A. Matzkin, Entanglement in the classical limit: Quantum correlations from classical probabilities, *Phys. Rev. A* **84**, 022111 (2011).
 - [22] G. Casati, I. Guarneri, e J. Reslen, Classical dynamics of quantum entanglement, *Phys. Rev. E* **85**, 036208 (2012).
 - [23] E. G. Cavalcanti, C. J. Foster, M. D. Reid e P. D. Drummond. Bell inequalities for continuous-variable correlations. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 210405 (2007).
 - [24] Q. Y. He, E. G. Cavalcanti, M. D. Reid e P. D. Drummond. Bell inequalities for Continuous-Variable Measurements. *Phys. Rev. A* **81**, 062106 (2010).
 - [25] D. Cavalcanti, L. Guerini, R. Rabelo e P. Skrzypczyk. General method for constructing local-hidden-variable models for entangled quantum states. *Phys. Rev. Lett.* **117**, 190401 (2016).
 - [26] W. Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik* **43**, 172 (1927).
 - [27] J. J. Sakurai e J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Pearson Education, Segunda Edição (2011).

-
- [28] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press (2000).
- [29] A. M. de Souza. Um Estudo de Emaranhamento e Desigualdades de Bell em Sistemas Térmicos Magnéticos. Tese de Doutorado, CBPF (2008).
- [30] A. D. Ribeiro e R. M. Angelo. Entanglement dynamics via semiclassical propagators in systems of two spins. *Phys. Rev. A* **85**, 052312 (2012).
- [31] A. R. Vieira. Seleção de modos spin-órbita em um interferômetro Sagnac. Dissertação de Mestrado, UFF (2013).
- [32] A. C. S. Costa. Correlações Quânticas em Sistemas Abertos. Tese de Doutorado, UFPR (2016).
- [33] J. V. Neumann. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton University Press, New Jersey (1955).
- [34] D. Bruss. Characterizing entanglement. *J. Math. Phys.* **43**, 9, 4237 (2002).
- [35] H. Araki e E. H. Lieb. Entropy Inequalities. *Comm. Math. Phys.* **18**, 160 (1970).
- [36] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu e B. Shumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
- [37] Nicholas A. Peters, Tzu-Chieh Wei e Paul G. Kwiat. Mixed state sensitivity of several quantum information benchmarks. *Phys. Rev. A* **70**, 052309 (2004).
- [38] C. Tsallis. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [39] J. S. Kim e B. C. Sanders. Unified entropy, entanglement measures and monogamy of multi-party entanglement. *J. Phys. A* **44**, 295303 (2011).
- [40] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe. Quantum Mechanics, Volume 1. Wiley, 1ª edição (1991).
- [41] J. S. Bell. Bertlmann's socks and the nature of reality. *J. Phys. Colloq.* **42**, (C2) 41 (1981).
- [42] Grant R. Fowles. Introduction to Modern Optics. Dover Publications, 2ª edição (1989).
- [43] Eric G. Cavalcanti e Howard M. Wiseman, Bell nonlocality, signal locality and unpredictability (or What Bohr could have told Einstein at Solvay had he known about Bell experiments), *Found. Phys.* **42**, 1329 (2012).

-
- [44] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani e S. Wehner. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.* **86**, 419 (2014).
- [45] M. Revzen, P. A. Mello, A. Mann e L. M. Johansen. Bell's inequality violation with non-negative Wigner functions. *Phys. Rev. A* **71**, 022103 (2005).
- [46] B. S. Cirel'son. Quantum generalizations of Bell's inequality. *Lett. Math. Phys.* **4**, 93 (1980).
- [47] R. F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
- [48] M. A. M. de Aguiar. Tópicos de Mecânica Clássica. Livraria da Física, 1^a edição (2011).
- [49] N. A. Lemos. Mecânica Analítica. Livraria da Física, 2^a edição (2007).
- [50] R. M. Angelo. Aspectos Quânticos e Clássicos da Dinâmica de Emaranhamento em Sistemas Hamiltonianos. Tese de Doutorado, UNICAMP (2003).
- [51] E. Schrodinger. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik. *Naturwissenschaften* **14**, 664 (1926).
- [52] R. J. Glauber. The Quantum Theory of Optical Coherence, *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963).
- [53] J. R. Klauder. Continuous-Representation Theory. II. Generalized Relation between Quantum and Classical Dynamics. *J. Math. Phys.* **4**, 1058 (1963).
- [54] E. C. G. Sudarshan. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams. *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277 (1963).
- [55] W. Vogel e D. G. Welsch. Quantum Optics. Wiley-VCH, 3^a edição (2006).
- [56] M. Baranger, M. A. M. de Aguiar, F. Keck, H. J. Korsch e B. Schellhaa. Semiclassical approximations in phase space with coherent states. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 7227 (2001).
- [57] Marcelo A. Marchioli. Mecânica Quântica no Espaço de Fase: I. Formulação de Weyl-Wigner. *Rev. Bras. Ens. Fis.* **24**, 4 (2002).
- [58] E. Wigner. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium. *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [59] A. L. Foggiatto. Dinâmica Aproximada de Operadores na Representação de Estados Coerentes. Dissertação de Mestrado, UFPR (2015).

-
- [60] J. M. Radcliffe. Some properties of coherent spin states. *J. Phys. A: Gen. Phys.* **4**, 3 (1971).
- [61] R. Gilmore. Geometry of symmetrized states. *Ann. Phys. (NY)* **74**, 391 (1972).
- [62] R. Gilmore. On properties of coherent states. *Rev. Mex. Fis.* **23**, 143 (1974).
- [63] A. M. Perelomov. Coherent states for arbitrary Lie group, *Commun. Math. Phys.* **26**, 222 (1972).
- [64] M. Novaes. Mecânica Quântica no Espaço de Fase: II. Estados Coerentes. *Rev. Bras. Ens. Fis.* **24**, 4 (2002).
- [65] M. A. M. de Aguiar, K. Furuya, C. H. Lewenkopf e M. C. Nemes. Chaos in a Spin-Boson System: Classical Analysis, *Ann. Phys.* **216**, 291 (1992).
- [66] A. D. Ribeiro , M. A. M. de Aguiar, e A. F. R. de Toledo Piza. The semiclassical coherent state propagator for systems with spin. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 3085 (2006).
- [67] E. A. Fonseca e F. Parisio. Measure of nonlocality which is maximal for maximally entangled qutrits. *Phys. Rev A* **92**, 030101(R) (2015).
- [68] A. Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Kluwer Academy Publishers, The Netherlands (1995).
- [69] R. K. Pathria e Paul D. Beale. *Statistical Mechanics*. Academic Press, 3^a edição (2011).
- [70] J. P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Physics*, Wiley-VCH (2009).
- [71] J. R. Klauder e E. C. G. Sudarshan. *Fundamentals of Quantum Optics*. W. A. Benjamin, Inc., New York (1968).
- [72] A. Yariv. *Quantum Electronics*. Wiley, 3^a edição (1989).
- [73] J. P. Dowling, G. S. Agarwal e Wolfgang P. Schleich. Wigner distribution of a general angular-momentum state: Applications to a collection of two-level atoms. *Phys. Rev. A* **49**, 5 (1994).
- [74] A. C. S. Costa, M. W. Beims e R. M. Angelo. Generalized discord, entanglement, Einstein-Podolsky-Rosen steering and Bell nonlocality in two-qubit systems under (non-)Markovian channels: Hierarchy of quantum resources and chronology of deaths and births. *Physics A* **461**, 469 (2016).